



Fondamenti di Automatica

1) Si traccino i diagrammi asintotici del modulo della risposta in frequenza delle seguenti funzioni di trasferimento, se ne determini su di essi la pulsazione critica, si valuti l'argomento di tali funzioni in corrispondenza della pulsazione così determinatosi e si confrontino questi dati con quelli deducibili usando Matlab.

$$G_1(s) = \frac{10(1-s)e^{-0.1s}}{(1+s)^2(1+5s)}$$

$$G_2(s) = \frac{10(1+s)(1+10s)}{(1+0.1s)^2(1+5s)(1-s)}$$

$$G_3(s) = \frac{10(1+5s)e^{-0.2s}}{(1+0.1s)(1+10s)^3}$$

$$G_4(s) = \frac{10(1+5s)^2}{s(1+0.1s)^2(1+2s)}$$



Fondamenti di Automatica

2) Si supponga che le fdt introdotte nel punto 1) siano le funzioni d'anello di sistemi retroazionati negativamente: per quali dei sistemi così introdotti è possibile pronunciarsi circa la stabilità asintotica facendo ricorso al criterio di Bode? Con quali conclusioni?

3) Si consideri il sistema descritto dalla fdt

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^4}$$

Si indichi una maniera per calcolare, utilizzando Matlab/Simulink, l'approssimante, secondo il metodo delle aree, della forma

$$G^*(s) = \frac{me^{-st}}{1+sT}$$

4) Si determini, usando lo sviluppo di Heaviside, la risposta allo scalino unitario del sistema con fdt



Fondamenti di Automatica

$$G(s) = \frac{(1 + 0.2s)(1 + 10s)}{(1 + 0.25s)(1 + 0.1s)(1 + s / 0.09)}$$

e, usando lo stesso metodo, la si confronti con quelle degli approssimanti di $G(s)$ ottenuti cancellando una delle due coppie di poli/zeri vicini, vale a dire

$$G_1(s) = \frac{(1 + 0.2s)}{(1 + 0.25s)(1 + 0.1s)}$$

$$G_2(s) = \frac{(1 + 10s)}{(1 + 0.1s)(1 + s / 0.09)}$$



Fondamenti di Automatica

5) Facendo ricorso al criterio di Bode ed utilizzando i diagrammi asintotici del modulo della risposta in frequenza, si dica se i sistemi retroazionati negativamente e con fdt d'anello $L(s)$ sono o no stabili asintoticamente, quando

$$L(s) = L_1(s) = \frac{10(1+10s)}{(1+2s)^2(1+0.5s)}$$

$$L(s) = L_2(s) = \frac{10(1+10s)}{s(1+s)^2(1+0.1s)}$$

$$L(s) = L_3(s) = \frac{10(1+10s)}{s^2(1+s)(1+0.1s)}$$



Fondamenti di Automatica

6) Facendo ricorso al criterio di Bode ed utilizzando i diagrammi asintotici del modulo della risposta in frequenza, si determini il valore limite del parametro τ in corrispondenza del quale il sistema retroazionato negativamente e con fdt d'anello $L(s)$ cessa di essere stabile asintoticamente, quando

$$L(s) = \frac{0.5(1-s)e^{-st}}{s(1+s)}$$

7) Si consideri il sistema retroazionato negativamente con regolatore $R(s)$ e processo $G(s)$. Dopo aver verificato la stabilità asintotica di esso, si scrivano le fdt che rappresentano le approssimazioni, ottenute dai diagrammi asintotici del modulo delle risposte in frequenza delle opportune fdt, delle funzioni $S(s)$, $F(s)$, $Q(s)$, essendo

$$R(s) = \frac{10(1+s)}{s}, \quad G(s) = \frac{10(1+5s)}{(1+s)(1+10s)}$$



Fondamenti di Automatica

Risposte

1)

$$|G_1(j\omega)|$$

$$\omega_c \cong 1.3 \text{ rad/s}$$

$$j_c = -\arctg(5\omega_c)$$

$$-3\arctg(\omega_c)$$

$$-0.1\omega_c 180/p =$$

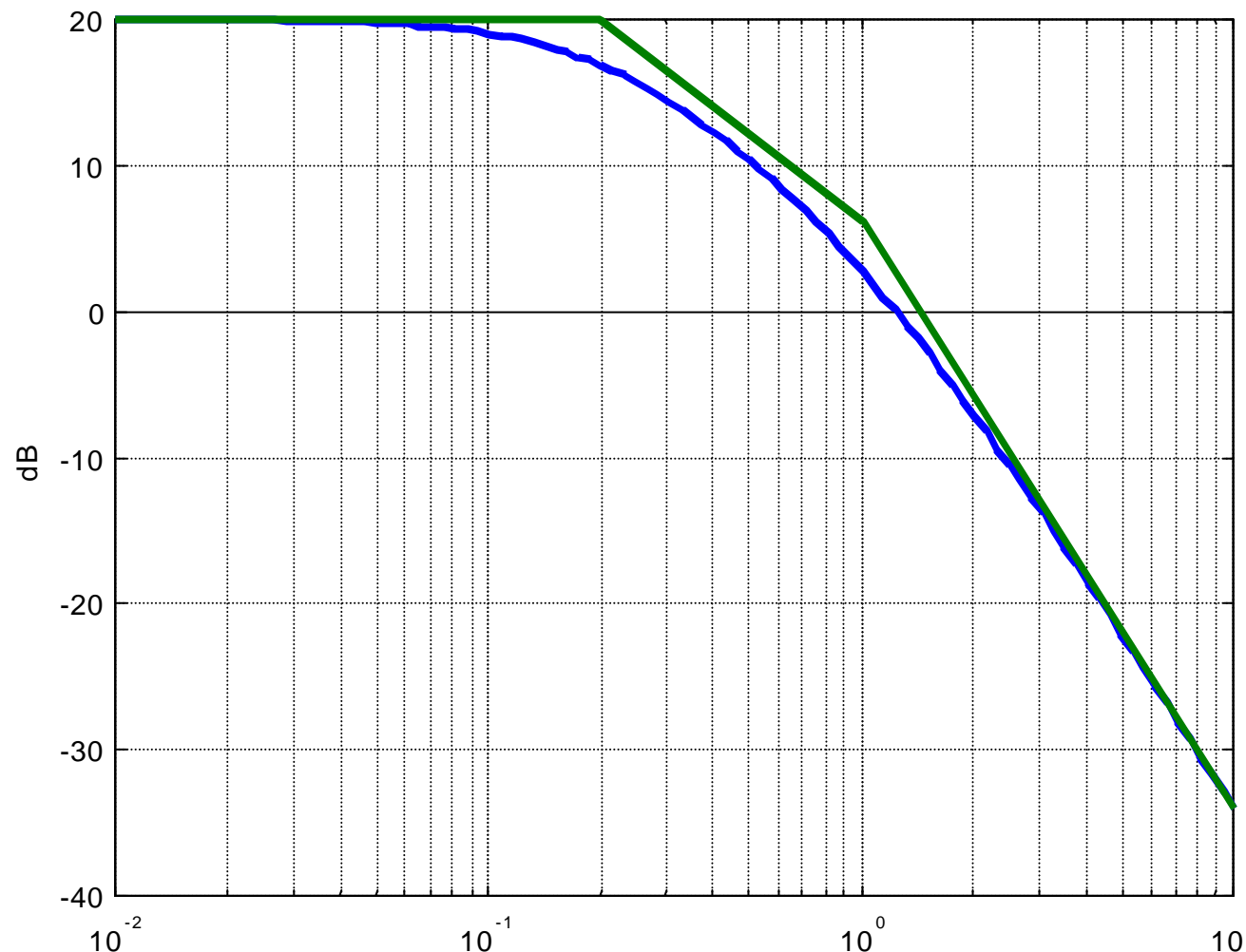
$$-246^\circ$$

La pulsazione critica valutata sul diagramma vero e il corrispondente argomento sono

$$\omega_c \cong 1.24 \text{ rad/s}$$

$$j_c = -241^\circ$$

Diagramma di Bode - Modulo



15/12/01

6



Fondamenti di Automatica

$$|G_2(j\omega)|$$

$$\omega_c \cong 44 \text{ rad/s}$$

$$j_c = \arctg(10\omega_c)$$

$$+ 2 \arctg(\omega_c)$$

$$- \arctg(5\omega_c)$$

$$- 2 \arctg(0.1\omega_c)$$

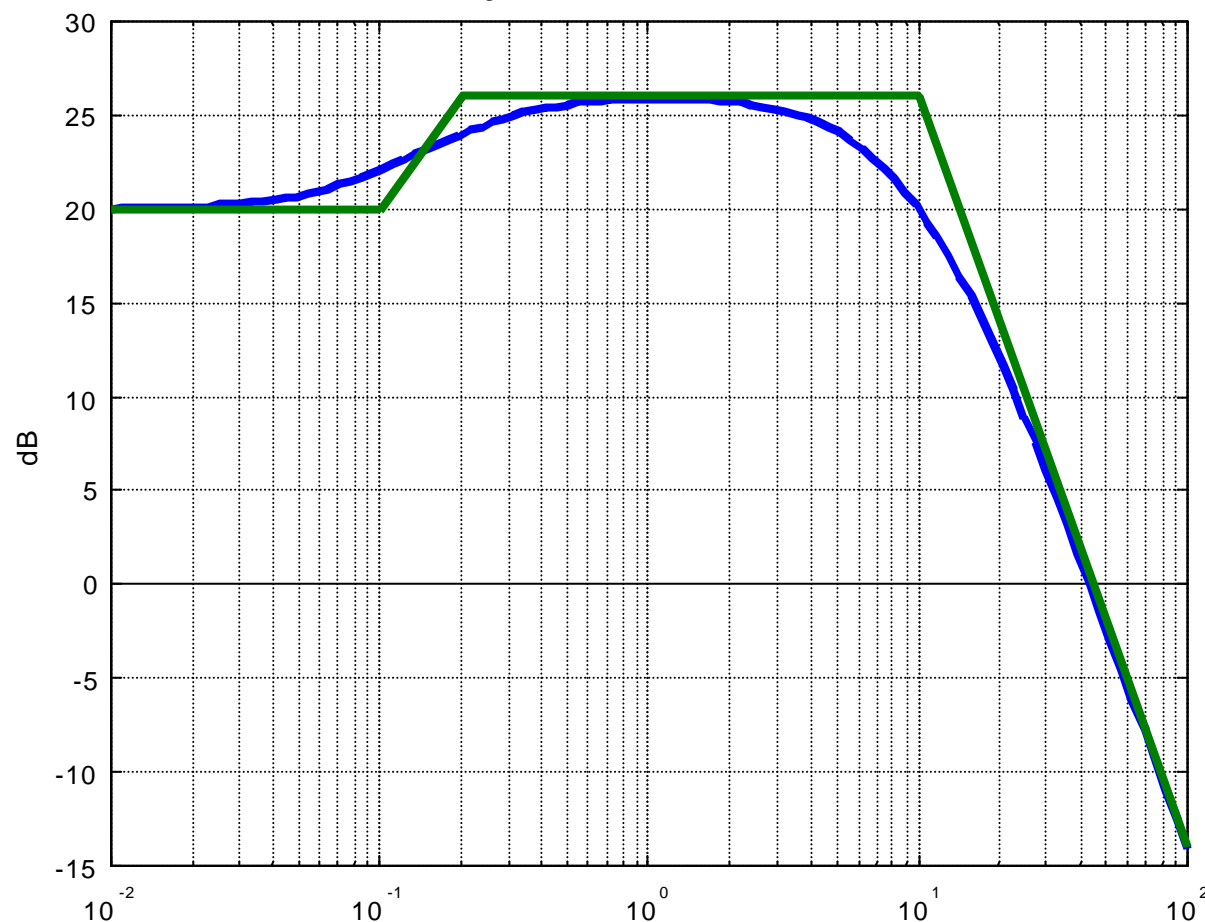
$$= 23^\circ$$

La pulsazione critica valutata sul diagramma vero e il corrispondente argomento sono

$$\omega_c \cong 43.6 \text{ rad/s}$$

$$j_c = 23.3^\circ$$

Diagramma di Bode - Modulo





Fondamenti di Automatica

$$|G_3(j\omega)|$$

$$\omega_c \cong 0.22 \text{ rad/s}$$

$$j_c = \arctg(5\omega_c)$$

$$-3 \arctg(10\omega_c)$$

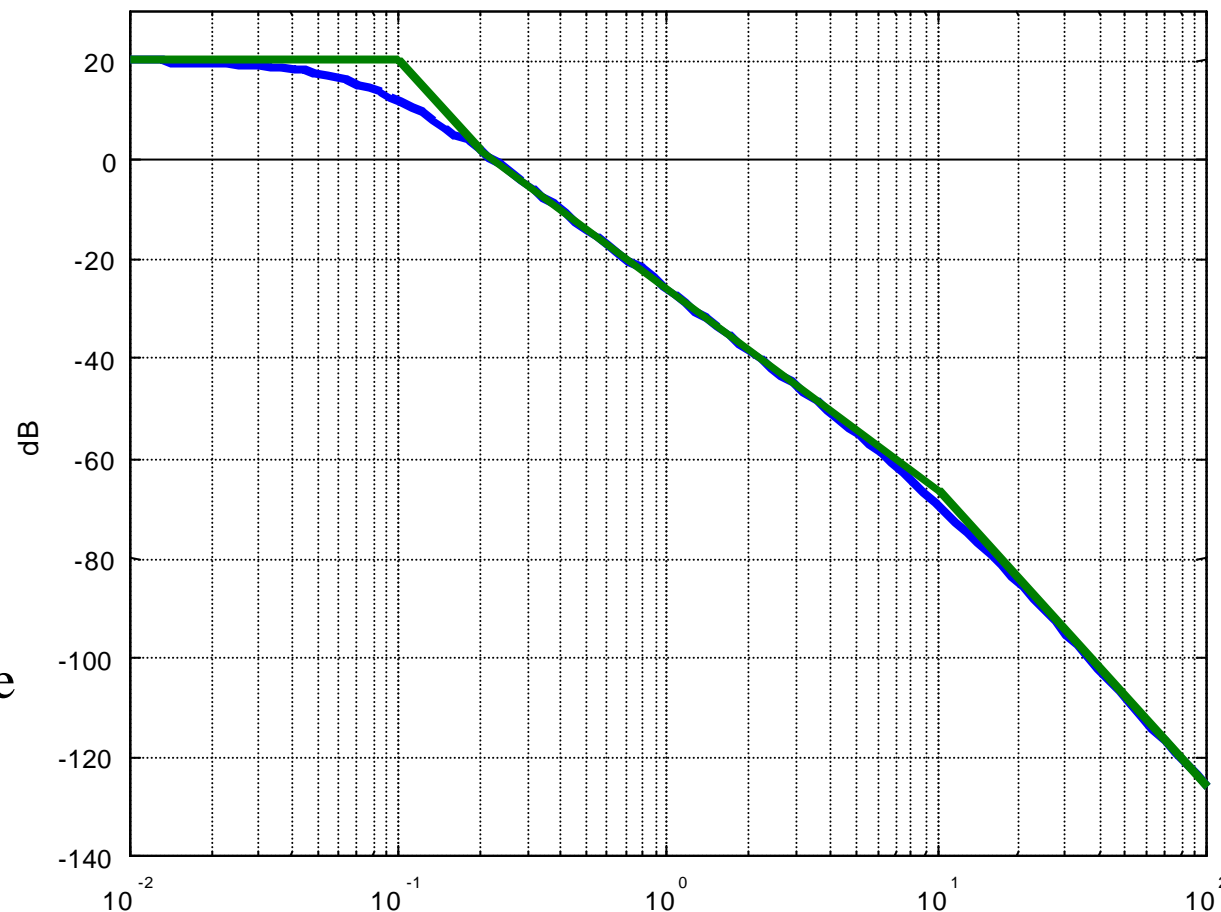
$$- \arctg(0.1\omega_c)$$

$$-0.2\omega_c 180/p$$

$$= -152.7^\circ$$

I valori della pulsazione critica valutata sul diagramma vero e il valore del corrispondente argomento coincidono, praticamente, con quelli sopra riportati

Diagramma di Bode - Modulo





Fondamenti di Automatica

$$|G_4(j\omega)|$$

$$\omega_c \cong 112 \text{ rad/s}$$

$$j_c = 2 \arctg(5\omega_c)$$

$$- 2 \arctg(0.1\omega_c)$$

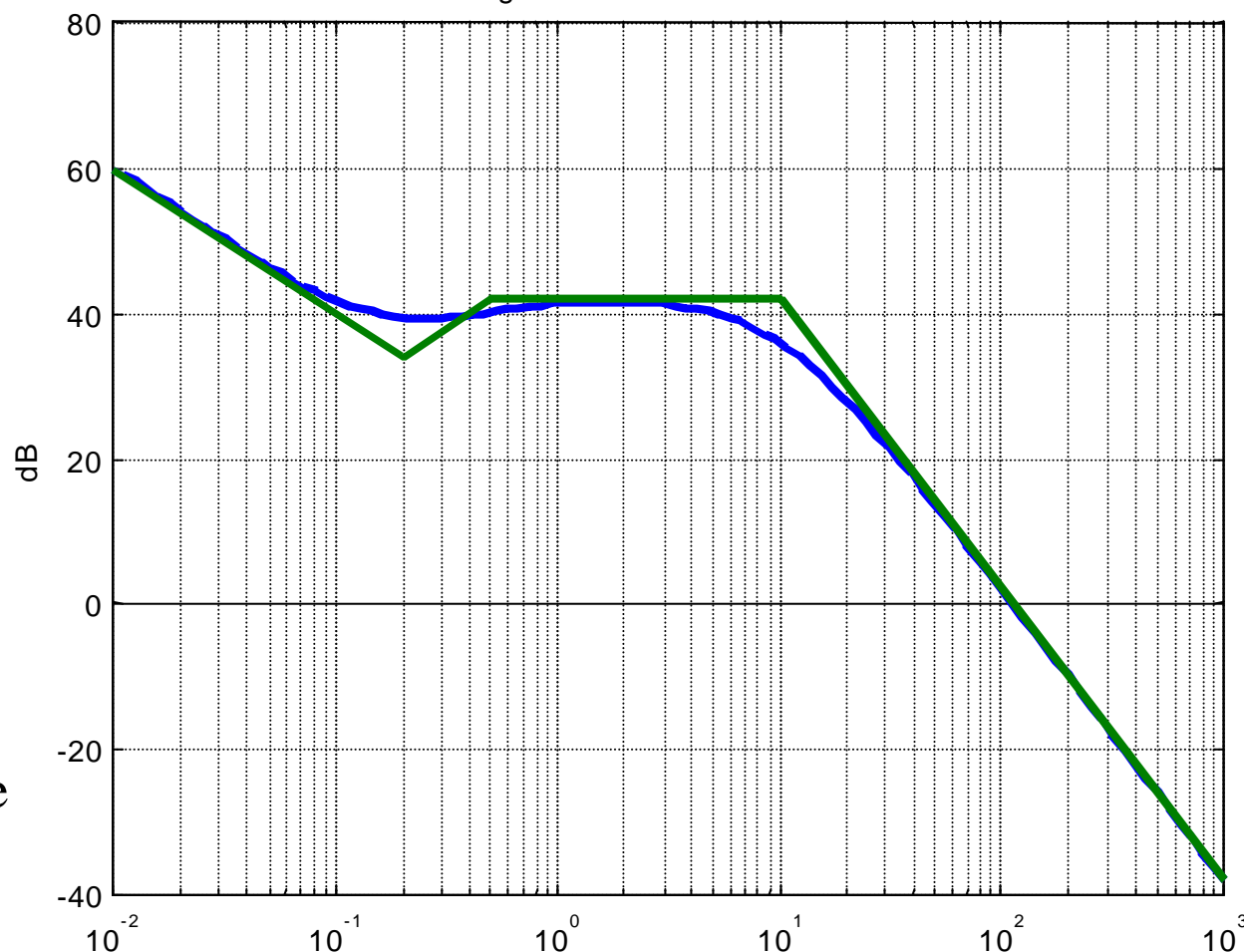
$$- \arctg(2\omega_c)$$

$$- 90^\circ$$

$$= -170^\circ$$

I valori della pulsazione critica valutata sul diagramma vero e il valore del corrispondente argomento coincidono, praticamente, con quelli sopra riportati

Diagramma di Bode - Modulo

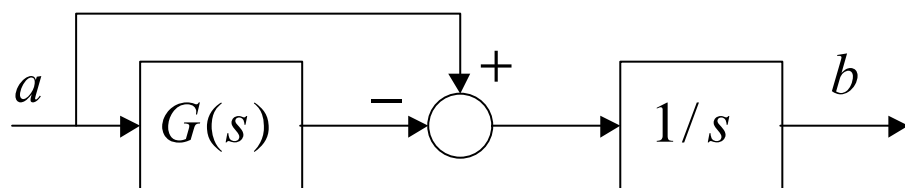




Fondamenti di Automatica

2) Il criterio di Bode può essere applicato ai casi 1,3,4 pervenendo alla conclusione che nei casi 3 e 4 si ha stabilità asintotica, instabilità nel caso 1.

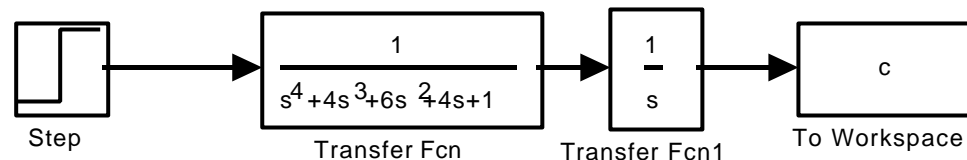
3) Il valore di regime (y_{bar}) per l'uscita (y) di $G(s)$ quando l'ingresso è $u(t)=sca(t)$ è ovviamente 1. Quindi $\mu=1$. Si osservi poi che l'area $S1$ (integrale da 0 a infinito di $y_{bar}-y$) è il valore asintotico (finale) dell'uscita b del sistema



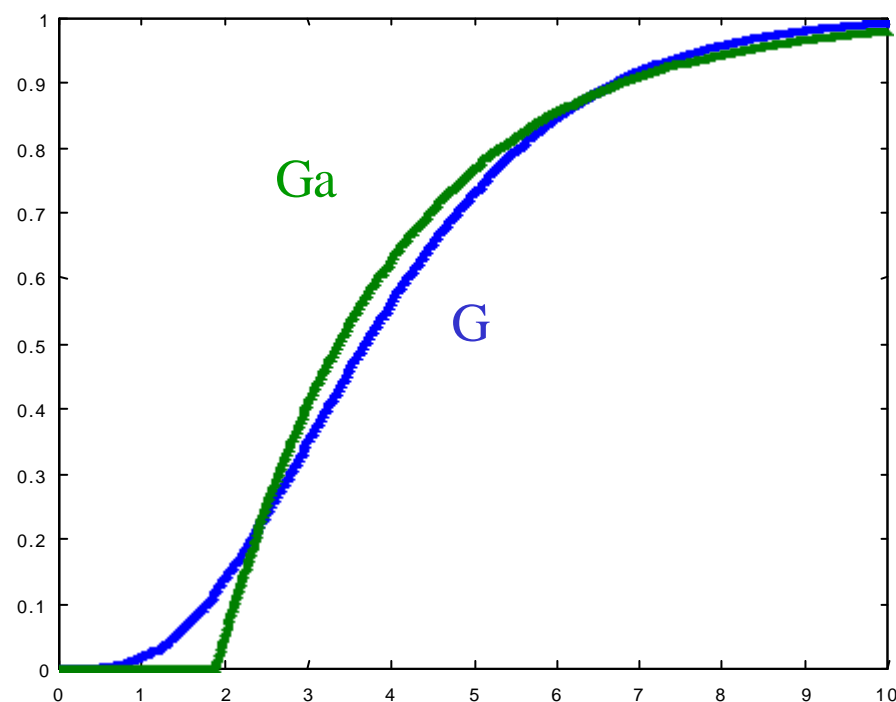
Quando l'ingresso è $sca(t)$. Dal teorema del valore finale segue $S1=4$ e quindi $\tau+T=4$.

Lo schema Simulink riportato di seguito con durata della simulazione pari a $\tau+T$ fornisce, come valore finale di c , $S2$ e quindi $T=eS2$, $\tau=S1-eS2$

Fondamenti di Automatica



Si ottiene $S2=0.7815$, $T=2.1242$, $\tau=1.8758$. Il confronto tra le risposte allo scalino di G e dell'approssimante G_a così calcolato è riportato nella figura successiva



15/12/01

11



Fondamenti di Automatica

4)

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{G(s)}{s} = \frac{(1+0.2s)(1+10s)}{s(1+0.25s)(1+0.1s)(1+s/0.09)} = \\ &= \frac{(1+0.2s)(1+10s)}{s(1/0.25+s)(1/0.1+s)(0.09+s) \times 0.25 \times 0.1/0.09} = \\ &= \frac{A}{s+1/0.25} + \frac{B}{s+1/0.1} + \frac{C}{s+0.09} + \frac{D}{s} \end{aligned}$$

$$A = -0.2992, B = -0.5994, C = -0.1014, D = 1$$

$$y(t) = 1 + Ae^{-t/0.25} + Be^{-t/0.1} + Ce^{-0.09t}$$



Fondamenti di Automatica

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= \frac{G_1(s)}{s} = \frac{(1+0.2s)}{s(1+0.25s)(1+0.1s)} = \\ &= \frac{(1+0.2s)}{s(1/0.25+s)(1/0.1+s) \times 0.25 \times 0.1} = \\ &= \frac{A1}{s+1/0.25} + \frac{B1}{s+1/0.1} + \frac{D1}{s} \end{aligned}$$

$$A1 = -0.3333, B1 = -0.6667, D1 = 1$$

$$y_1(t) = 1 + A1e^{-t/0.25} + B1e^{-t/0.1}$$



Fondamenti di Automatica

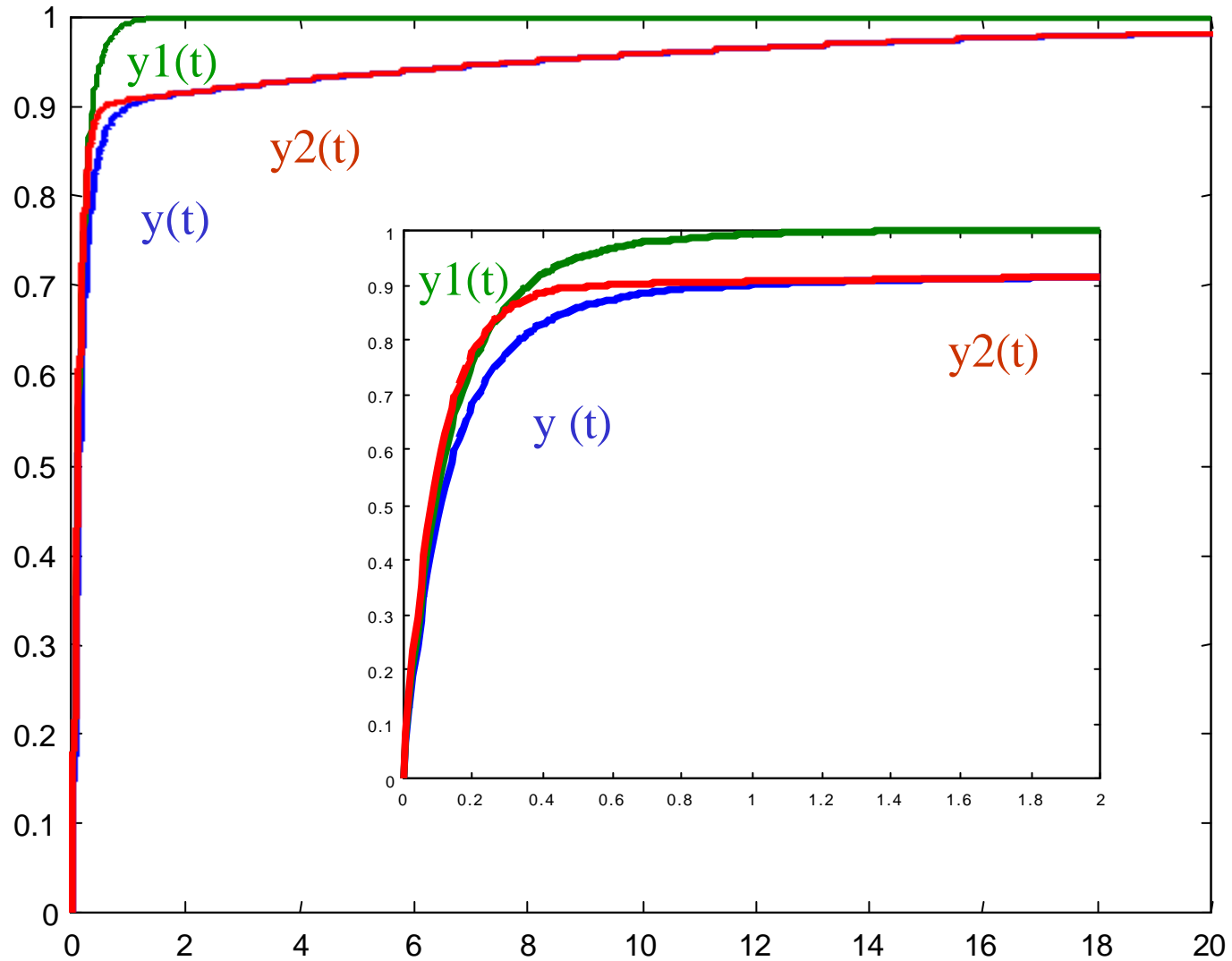
$$\begin{aligned} Y_2(s) &= \frac{G_2(s)}{s} = \frac{(1+10s)}{s(1+0.1s)(1+s/0.09)} = \\ &= \frac{(1+10s)}{s(1/0.1+s)(0.09+s) \times 0.1/0.09} = \\ &= \frac{B_2}{s+1/0.1} + \frac{C_2}{s+0.09} + \frac{D_2}{s} \end{aligned}$$

$$B_2 = -0.8991, C_2 = -0.1009, D_2 = 1$$

$$y_2(t) = 1 + B_2 e^{-t/0.1} + C_2 e^{-0.09t}$$

Le tre risposte sono messe a confronto nella figura successiva

Fondamenti di Automatica



15/12/01

15



Fondamenti di Automatica

Si noti che l'approssimante G_2 è da ritenersi migliore dell'approssimante G_1 , malgrado il polo e lo zero che si cancellano con l'approssimante G_2 ($p_2=-4, z_2=-5$) siano più “distanti” ($d_2=1$) di quanto non lo siano il polo e lo zero ($p_1=-0.09, z_1=-0.1$) ($d_1=0.01$) che si cancellano con l'approssimante G_1 . Ciò avviene perché la coppia p_1/z_1 è molto più vicina dell'altra all'asse immaginario. Notare come l'approssimante G_2 descriva fedelmente la parte finale del transitorio.



5)

Fondamenti di Automatica

$$L(s) = L_1(s) = \frac{10(1+10s)}{(1+2s)^2(1+0.5s)}$$

$$w_c = 7 \text{ rad/s}$$

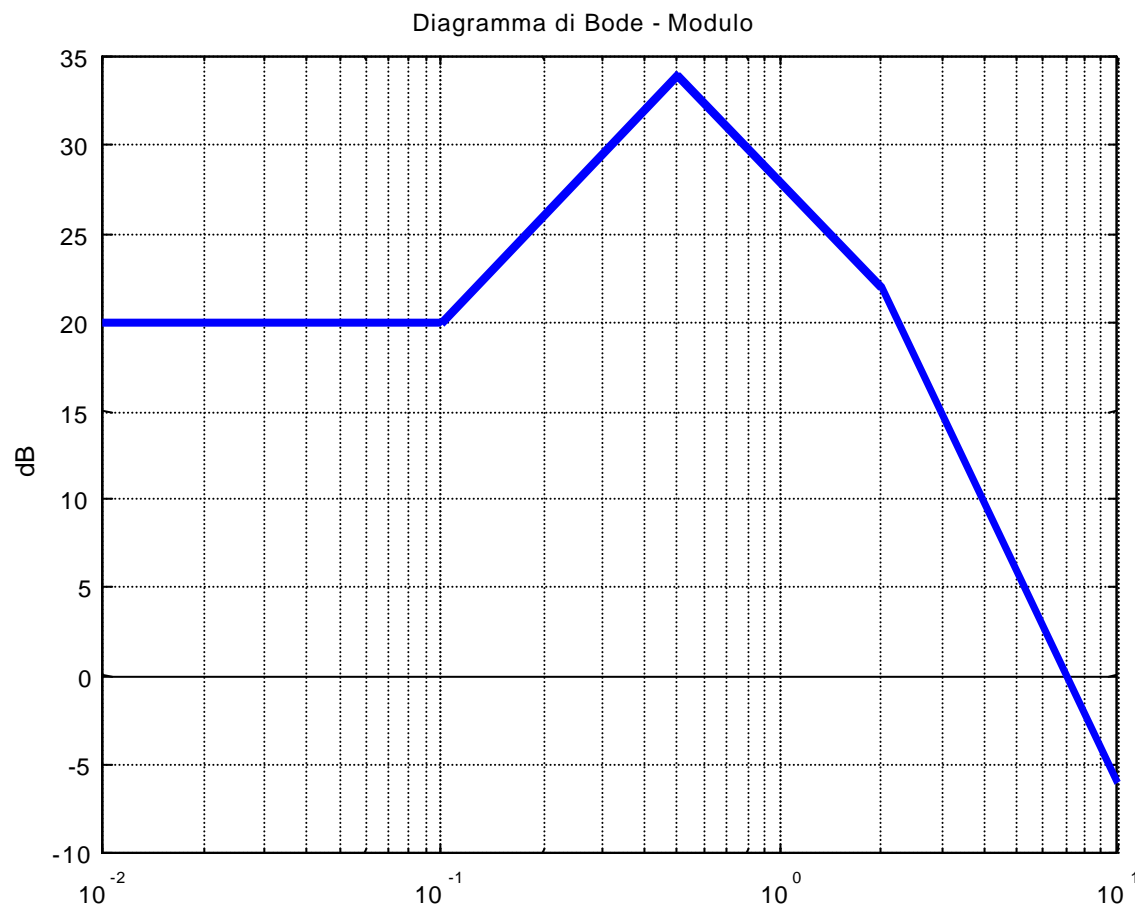
$$j_c = \arctg(10w_c)$$

$$- 2 \arctg(2w_c)$$

$$- \arctg(0.5w_c)$$

$$= -157^\circ$$

Il sistema ad anello chiuso è
asintoticamente stabile



15/12/01

17



Fondamenti di Automatica

$$L(s) = L_2(s) = \frac{10(1+10s)}{s(1+s)^2(1+0.1s)}$$

$$w_c = 10 \text{ rad/s}$$

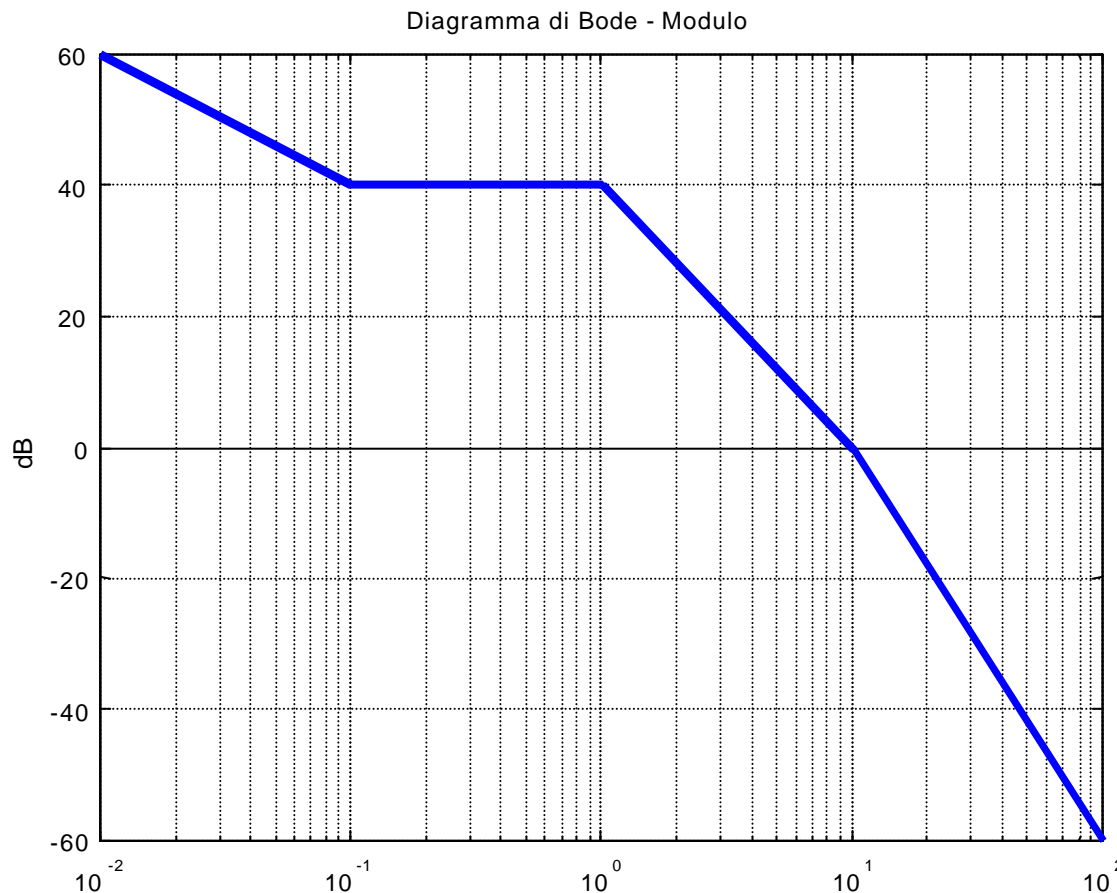
$$j_c = \arctg(10w_c)$$

$$-90^\circ - 2 \arctg(w_c)$$

$$- \arctg(0.1w_c)$$

$$= -214^\circ$$

Il sistema ad anello chiuso è instabile





Fondamenti di Automatica

$$L(s) = L_3(s) = \frac{10(1+10s)}{s^2(1+s)(1+0.1s)}$$

$$\omega_c = 10 \text{ rad/s}$$

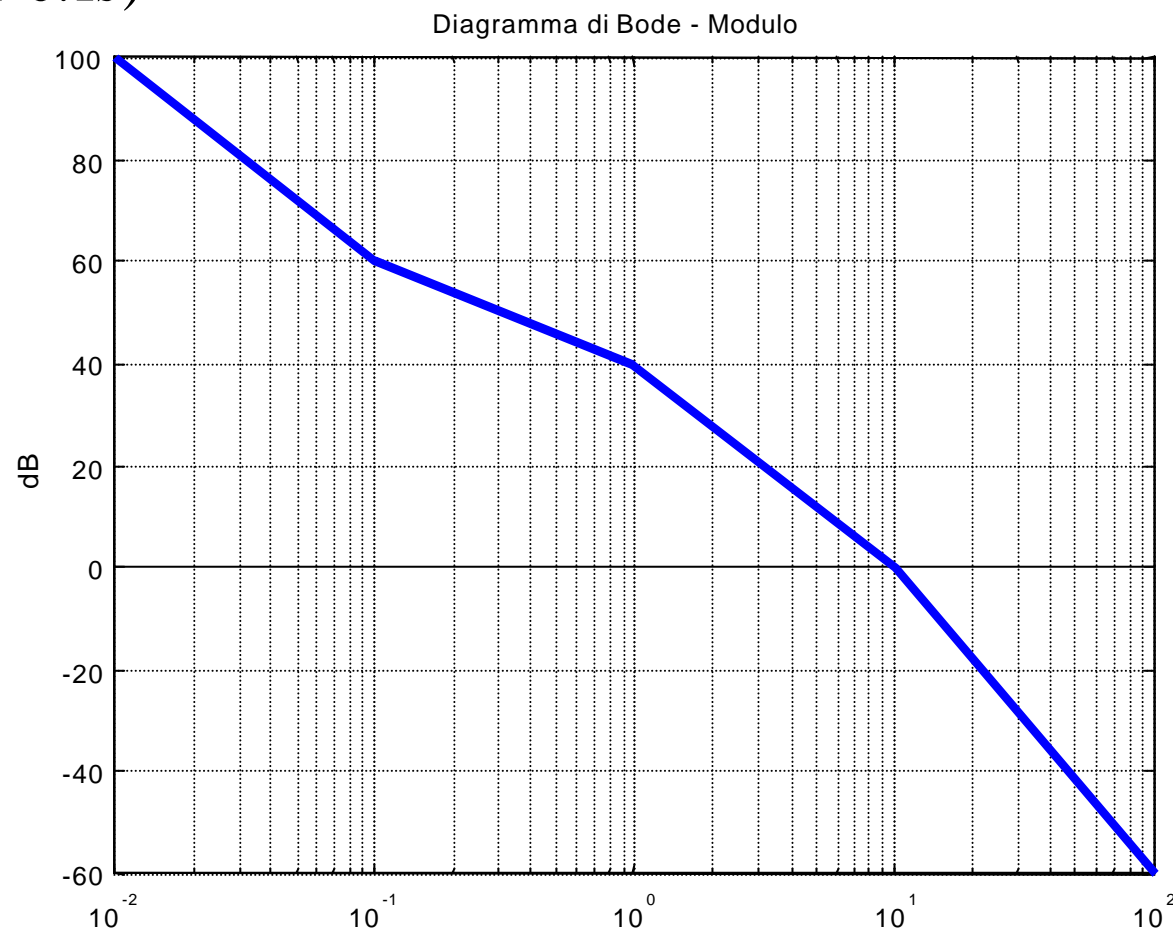
$$j_c = \arctg(10\omega_c)$$

$$-180^\circ - \arctg(\omega_c)$$

$$- \arctg(0.1\omega_c)$$

$$= -220^\circ$$

Il sistema ad anello chiuso è instabile





Fondamenti di Automatica

6)

$$L(s) = \frac{0.5(1-s)e^{-st}}{s(1+s)} = L^*(s)e^{-st}$$

$$L^*(s) = \frac{0.5(1-s)}{s(1+s)}$$

Per L^* si ha

$$\omega_c = 0.5 \text{ rad/s}$$

$$\mathbf{j}_c = -2 \arctg(\omega_c)$$

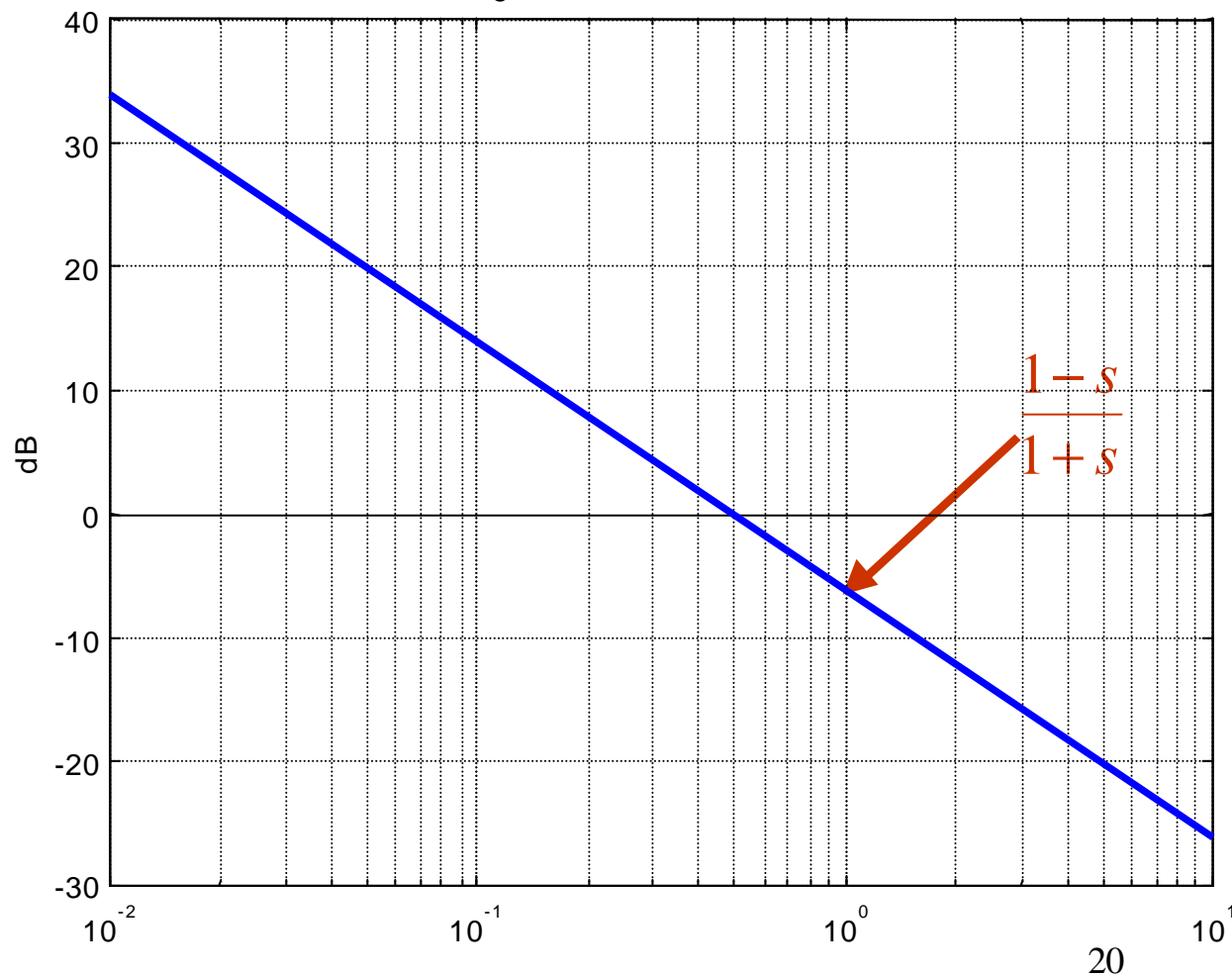
$$-90^\circ = -143.13^\circ$$

e quindi

$$t < \frac{36.87p}{180\omega_c} = 1.29$$

15/12/01

Diagramma di Bode - Modulo





Fondamenti di Automatica

7)

$$R(s) = \frac{10(1+s)}{s}, G(s) = \frac{10(1+5s)}{(1+s)(1+10s)}$$

$$L(s) = \frac{100(1+5s)}{s(1+10s)}$$

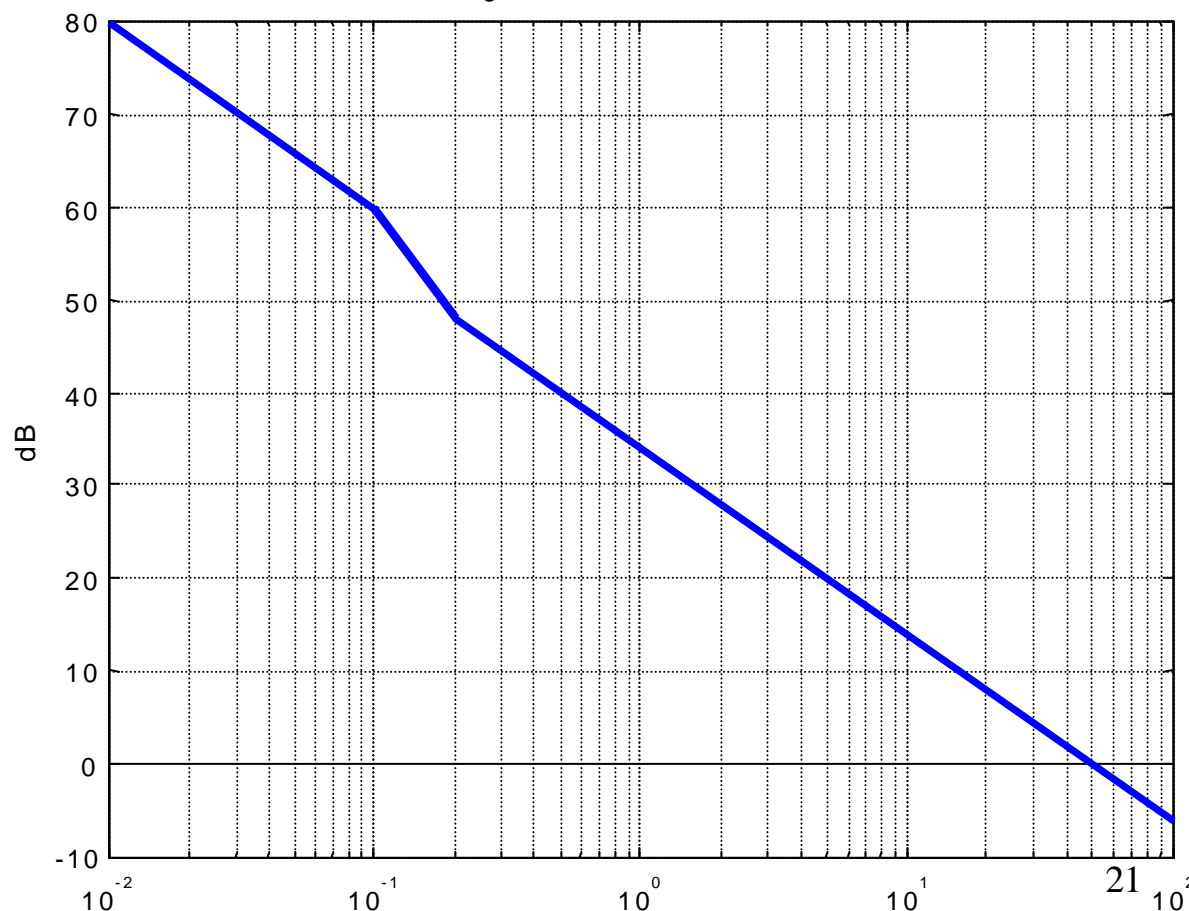
$$w_c = 50 \text{ rad/s}$$

$$j_c = \arctg(5w_c)$$

$$- \arctg(10w_c)$$

$$- 90^\circ = -90^\circ$$

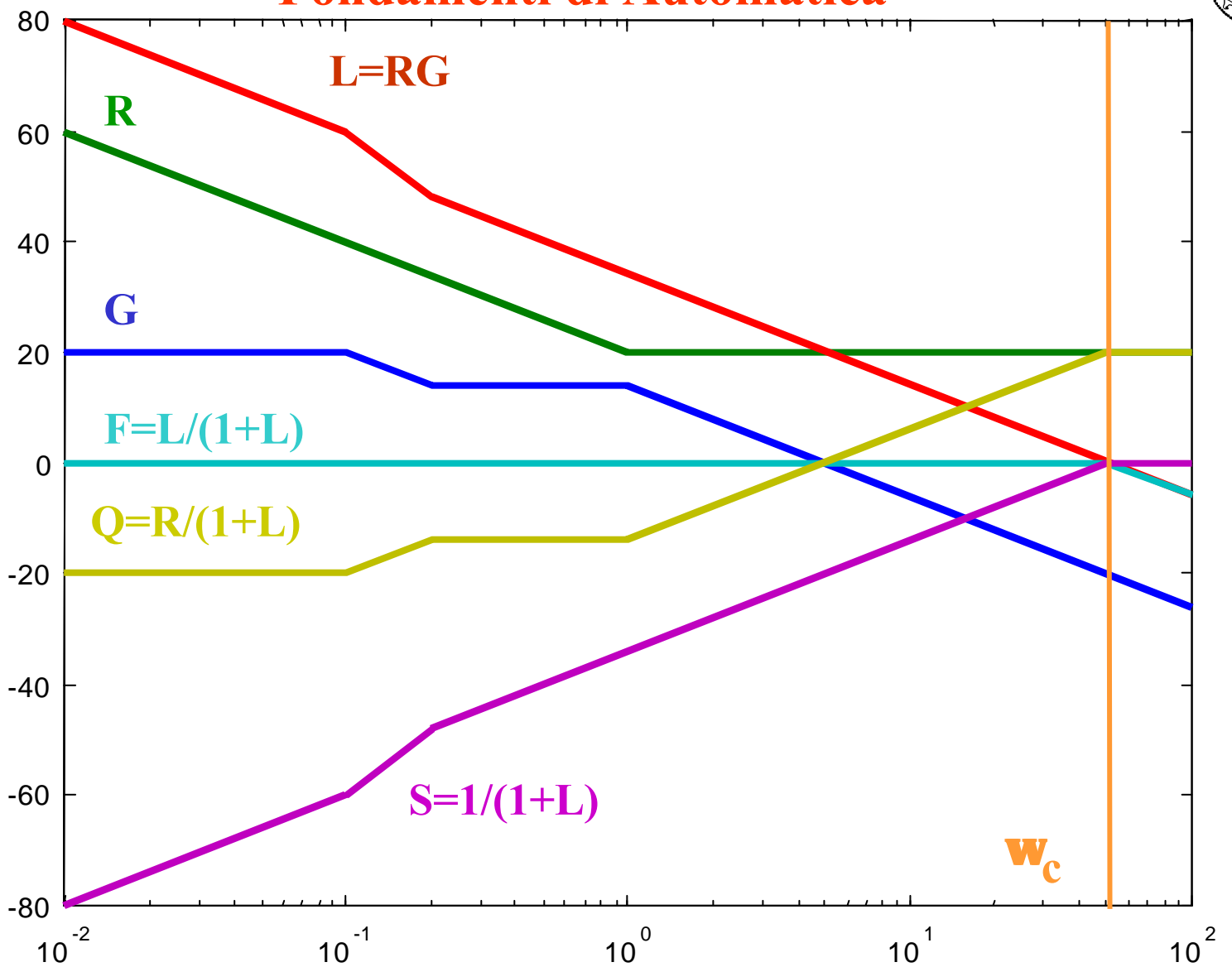
Diagramma di Bode - Modulo



15/12/01



Fondamenti di Automatica



15/12/01

22