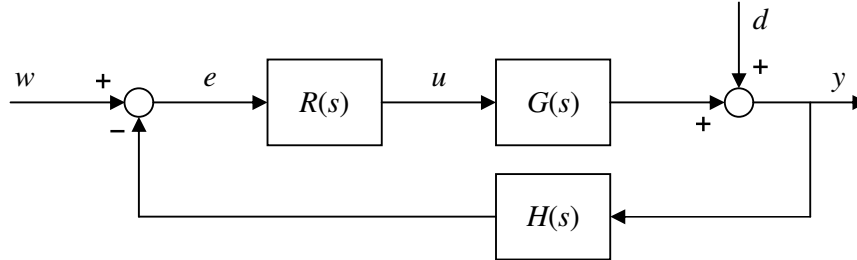


Fondamenti di Automatica – IOL
Prova in itinere PI02 – A.A. 2004/2005
Traccia della soluzione

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema di controllo mostrato in Figura



dove $G(s) = \frac{0.4}{(1+0.1s)(1+0.05s)}$, $H(s) = e^{-0.02s}$

1.1) Progettare un regolatore $R(s)$ con struttura PI in modo che siano rispettate le seguenti specifiche:

- risulti $e(\infty) = 0$ quando $d(t) = \text{sca}(t)$
- la pulsazione critica sia $\omega_c \geq 5 \text{ rad/s}$
- il sistema sia asintoticamente stabile

Consideriamo un regolatore PI espresso nella forma

$$R(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) = \frac{K}{T_I} \frac{1 + T_I s}{s} = \mu_R \frac{1 + T_I s}{s}$$

dove per semplicità si è posto $\mu_R = K/T_I$.

Il progetto del regolatore sarà articolato in tre fasi: per prima cosa si verificherà se il regolatore PI permette di soddisfare le specifiche statiche, successivamente si tradurranno i vincoli sulle prestazioni del sistema in vincoli sul diagramma di Bode della funzione d'anello, infine si fisseranno i parametri del regolatore in modo da rispettare tutti i vincoli.

Progetto statico

Verifichiamo se il regolatore PI permette di soddisfare le specifiche statiche sull'errore a transitorio esaurito (ipotizzando che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile al termine della sintesi). La funzione di trasferimento tra $d(t)$ e $y(t)$ vale

$$S(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)H(s)}$$

mentre il valore assoluto dell'errore a transitorio esaurito in risposta ad uno scalino di ampiezza A_d vale

$$\lim_{s \rightarrow 0} s S(s) \frac{A_d}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{\mu_R}{s} G(0)H(0)} A_d = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s + \mu_R 0.4 \cdot 1} A_d = 0$$

indipendentemente da μ_R . La specifica statica è quindi soddisfatta dal regolatore di tipo PI.

Analisi dei vincoli

Il vincolo sulla pulsazione di taglio ω_c si traduce in maniera molto semplice in un vincolo sul diagramma di Bode della funzione d'anello $L(s)$, come mostrato in Fig. 2. Dal momento che $L(s)$ non ha poli a parte reale positiva, nell'ipotesi che il diagramma di Bode di $L(j\omega)$ attraversi una sola volta l'asse 0 dB e che $\mu_L > 0$, valgono le ipotesi del teorema di Bode ed il vincolo sulla stabilità del sistema in anello chiuso si traduce nel richiedere $\phi_m > 0^\circ$.

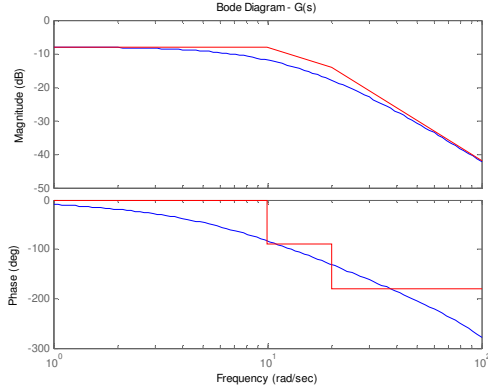


Fig. 1

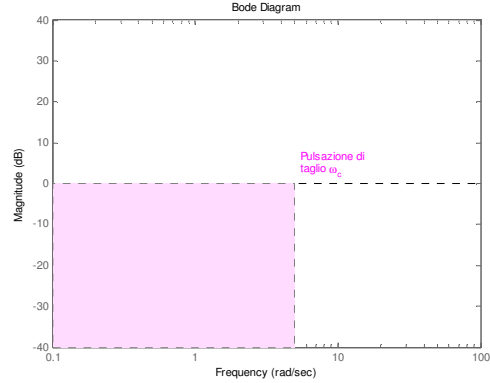


Fig. 2

Progetto del regolatore

Come prima ipotesi proviamo a cancellare il polo più in bassa frequenza con lo zero del regolatore e fissiamo il guadagno in modo da ottenere sul diagramma di Bode asintotico del modulo una pulsazione di taglio $\omega_c \cong 8 \text{ rad/s} > 5 \text{ rad/s}$. Il regolatore risulta

$$R(s) = 20 \frac{1 + 0.1s}{s}$$

mentre in Fig. 3 è rappresentato il diagramma di Bode della funzione d'anello

$$L(s) = \frac{8e^{-0.02s}}{s(1 + 0.05s)}$$

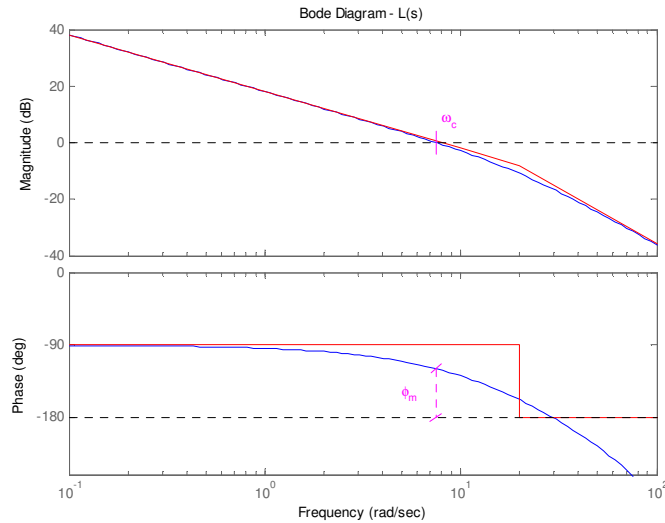


Fig. 3

Il margine di fase ϕ_m

$$\phi_m = 180^\circ + \angle L(j\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(0.05\omega_c) - 0.02\omega_c \frac{180^\circ}{\pi} \cong 60^\circ > 0^\circ$$

risulta positivo, garantendo l'asintotica stabilità del sistema in anello chiuso. I corrispondenti parametri del regolatore PI risultano

$$K = 0.2 \quad T_I = 0.1$$

1.2) A progetto ultimato, valutare l'attenuazione che subisce il disturbo $d(t) = \sin(t) + \cos(50t)$.

Per studiare l'attenuazione del disturbo $d(t)$ calcoliamo il modulo della funzione di trasferimento $S(s)$, che in prima approssimazione può essere approssimato come

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \cong \begin{cases} -|L(j\omega)|_{\text{dB}} & \omega < \omega_c \\ 1 & \omega > \omega_c \end{cases}$$

e quindi l'andamento del diagramma di Bode di $|S(j\omega)|$ è di tipo passa-alto, come mostrato in Fig. 4

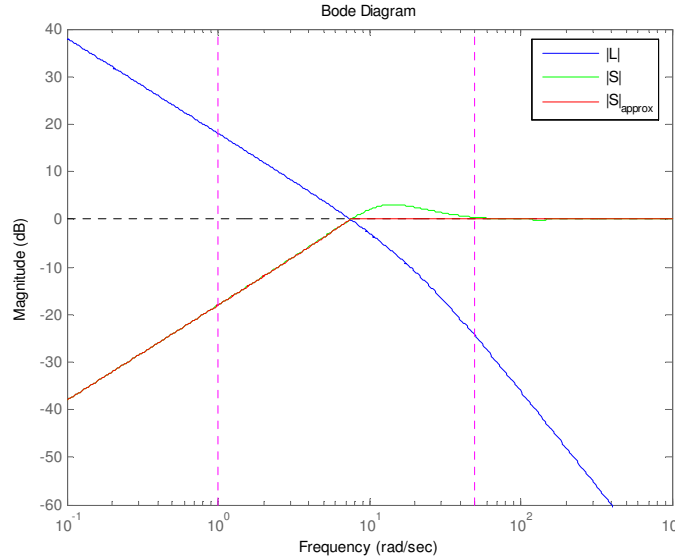


Fig. 4

Dal momento che il disturbo è la somma di due termini di tipo sinusoidale, possiamo valutare approssimativamente l'attenuazione di ciascuna componente (indicate con delle rette verticali magenta) utilizzando il diagramma di Bode approssimato del modulo di $|S(j\omega)|$.

$$\sin(t) \Rightarrow -20 \text{ dB} \cong 0.1$$

$$\cos(50t) \Rightarrow 0 \text{ dB} \cong 1$$

Utilizzando il teorema della risposta in frequenza possiamo calcolare l'espressione esatta dell'uscita dovuta al disturbo. Detta $y_d(t)$ la risposta al disturbo risulta

$$\begin{aligned} y_d &= |S(j1)| \sin(t + \angle S(j1)) + |S(j50)| \cos(50t + \angle S(j50)) = \\ &= 0.125 \sin(t + 1.51) + 1.05 \cos(50t - 0.0362) \end{aligned}$$

Il risultato ottenuto è perfettamente in accordo con il diagramma di Bode reale di $|S(j\omega)|$, e comunque è ragionevolmente vicino al risultato ottenuto con l'approssimazione precedente. La Fig. 5 mostra la risposta del sistema al disturbo: solo la componente in bassa frequenza viene parzialmente attenuata.

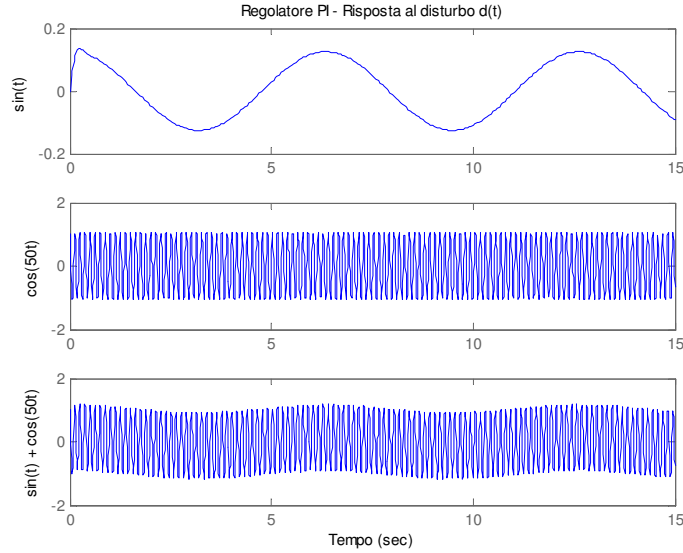


Fig. 5

1.3) Determinare una realizzazione digitale del regolatore analogico progettato, ricavandone la funzione di trasferimento e la corrispondente legge di controllo nel dominio del tempo. Verificare inoltre se tale regolatore risulta asintoticamente stabile.

Iniziamo con la scelta di un valore opportuno della pulsazione di campionamento. Una regola empirica suggerisce la scelta di una pulsazione di campionamento ω_s nell'intervallo

$$5\omega_c \leq \omega_s \leq 50\omega_c$$

a cui corrisponde un periodo di campionamento

$$\frac{2\pi}{50\omega_c} \leq T_s \leq \frac{2\pi}{5\omega_c}$$

ovvero approssimativamente $0.0157 \leq T_s \leq 0.157$. Possiamo scegliere ad esempio $T_s = 0.1$, ottenendo con il metodo di discretizzazione di Tustin

$$R^*(z) = 20 \frac{1 + 0.1 \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}}{\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}} = 10 \frac{(T_s + 0.2)z + (T_s - 0.2)}{z-1} = \frac{3z-1}{z-1}$$

Confrontando i diagrammi di Bode della risposta in frequenza $R(j\omega)$ e $R^*(e^{j\omega})$ si nota una buona aderenza almeno in termini di modulo (Fig. 6).

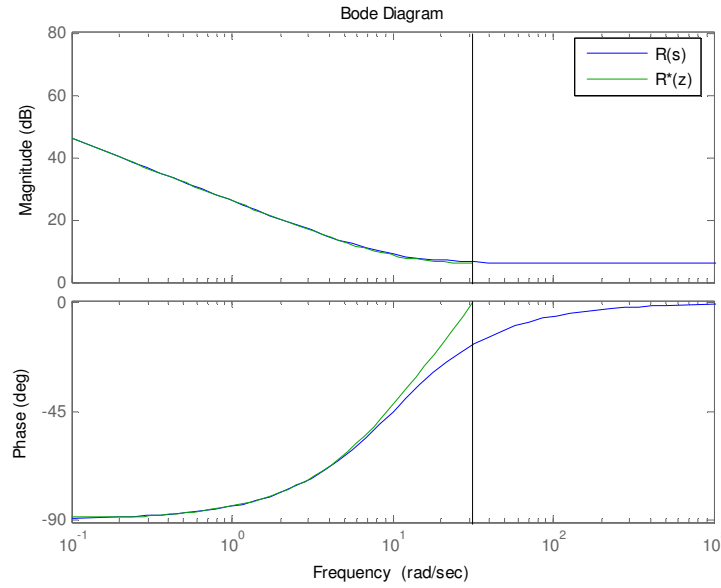


Fig. 6

La legge di controllo nel dominio del tempo corrispondente risulta

$$\begin{aligned}\frac{U(z)}{E(z)} &= \frac{3z-1}{z-1} \\ (z-1)U(z) &= (3z-1)E(z) \\ u(k+1) - u(k) &= 3e(k+1) - e(k) \\ u(k) &= u(k-1) + 3e(k) - e(k-1)\end{aligned}$$

Il regolatore risulta semplicemente stabile perchè ha un polo semplice in $z=1$ (quindi con $|z|=1$). Il regolatore, inoltre, risulta semplicemente stabile indipendentemente dal metodo di discretizzazione e dal passo di campionamento utilizzato perchè i poli in $s=0$ (“integratori” a tempo continuo) si mappano sempre in poli in $z=1$ (“integratori” a tempo discreto).

1.4) Valutare se è possibile migliorare le prestazioni del sistema di controllo (in particolare l’attenuazione del disturbo) mediante l’uso di un PID.

Utilizzando un regolatore di tipo PID di tipo “scolastico” con una funzione di trasferimento del tipo

$$R(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = \frac{K}{T_I} \frac{1 + T_I s + T_I T_D s^2}{s} = \mu \frac{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{s}$$

è possibile sfruttare l’anticipo di fase prodotto dallo zero aggiuntivo per aumentare la banda a parità di margine di fase (oppure per aumentare il margine di fase a parità di banda) rispetto al caso PI. Ad esempio, considerando il regolatore PID che cancella con i due zeri i due poli del processo

$$R(s) = \mu \frac{(1 + 0.1s)(1 + 0.05s)}{s}$$

e fissando il guadagno a $\mu_1 = 50$, si ottiene un sistema in anello chiuso con banda passante $\omega_c^{PID1} = 20$ rad/s e margine di fase $\phi_m^{PID1} = 65^\circ$, contro $\omega_c^{PI} = 8$ rad/s e $\phi_m^{PI} = 60^\circ$ del caso PI.

L'utilizzo del PID permette però di migliorare solo marginalmente il comportamento del sistema nei confronti del disturbo. Per migliorare l'attenuazione della componente in alta frequenza del disturbo è necessario allargare la banda passante del sistema, tuttavia non è possibile aumentare a piacere la pulsazione di taglio a causa del ritardo nell'anello (come verrà meglio messo in evidenza nel punto 1.5). Infatti, allargando la banda passante del sistema si riduce anche il margine di fase e questo determina un aumento del tempo di assestamento e delle oscillazioni nella risposta a scalino e la comparsa di picchi di risonanza nei pressi della pulsazione della componente cosinusoidale del disturbo, che possono determinare un'amplificazione di tale componente del disturbo. A titolo di esempio consideriamo il regolatore PID e fissiamo il guadagno a $\mu_2 = 150$ in modo da ottenere una banda passante $\omega_c^{PID2} = 60 \text{ rad/s}$ e $\phi_m^{PID2} = 20^\circ$.

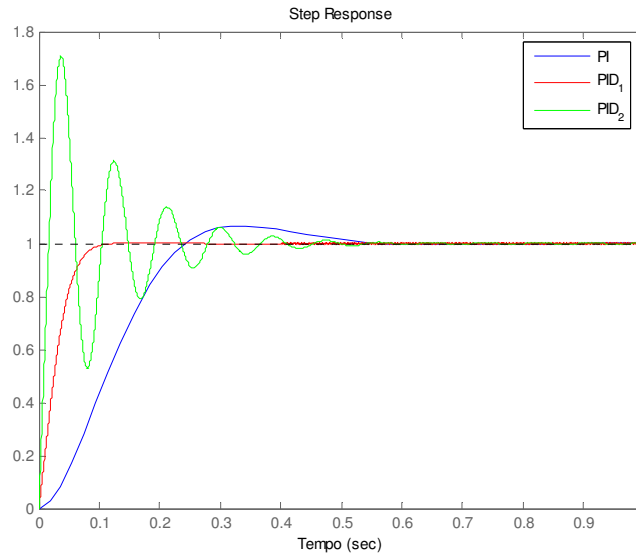


Fig. 7

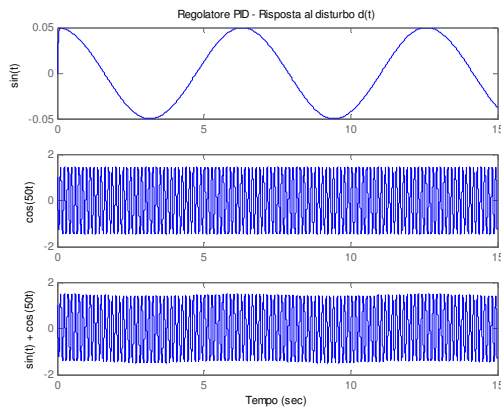


Fig. 8

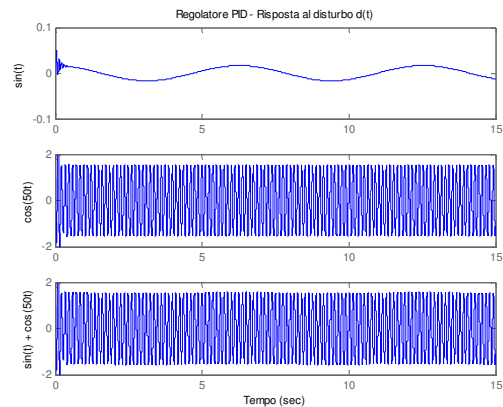


Fig. 9

Considerazioni analoghe valgono anche per il caso del regolatore PID reale (con due zeri e due poli), supponendo di posizionare il polo aggiuntivo ad una pulsazione sufficientemente elevata rispetto alla pulsazione di taglio.

1.5) Discutere infine se, potendo scegliere liberamente la struttura del regolatore $R(s)$, ci sarebbe la possibilità di migliorare ulteriormente le prestazioni del sistema di controllo in termini di banda passante.

La presenza del ritardo nell'anello determina uno sfasamento che diminuisce linearmente con la pulsazione. A meno di non adottare schemi di controllo avanzati che consentono di “compensare” eventuali ritardi e supponendo di voler inserire un integratore nell'anello per garantire errore nullo a transitorio esaurito, la massima banda passante ottenibile non eccederà di molto la pulsazione a cui lo sfasamento complessivo è pari a -180° , ovvero

$$-180^\circ = -90^\circ - \omega_c^{\max} 0.02 \frac{180}{\pi} \Rightarrow \omega_c^{\max} \cong 70 \text{ rad/s}$$

Poichè questa pulsazione di taglio può essere già raggiunta con un regolatore PID, che cancella completamente la dinamica del processo con i due zeri, è inutile utilizzare regolatori di complessità superiore.