

Fondamenti di Automatica – IOL
Prova in itinere PI01 – A.A. 2004/2005
Traccia della soluzione

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -5x_1(t)x_2(t) + \alpha x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_3(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -x_1^2(t) + 4u(t) \\ y(t) &= 10x_2(t)\end{aligned}$$

1.1) Determinare il valore del parametro α in modo che, con ingresso $\bar{u} = 1$, il sistema stia in equilibrio con $\bar{y} = 5$ e \bar{x}_1 positivo.

Per definizione, all'equilibrio la derivata di x rispetto al tempo è nulla e sia le variabili di stato che l'uscita sono costanti. Per calcolare i loro valori quando l'ingresso è $u(t) = \bar{u} = 1$ dobbiamo quindi imporre

$$\begin{cases} 0 = -5\bar{x}_1\bar{x}_2 + \alpha\bar{x}_2 + \bar{u} \\ 0 = -\bar{x}_3 + \bar{u} \\ 0 = -\bar{x}_1^2 + 4\bar{u} \\ \bar{y} = 10\bar{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = \pm 2 \\ \bar{x}_2 = \frac{1}{5\bar{x}_1 - \alpha} \\ \bar{x}_3 = 1 \\ \bar{y} = \frac{10}{5\bar{x}_1 - \alpha} \end{cases}$$

Per avere un'uscita $\bar{y} = 5$ in corrispondenza dell'equilibrio con $\bar{x}_1 = 2 > 0$ deve essere

$$\bar{y} = \frac{10}{5 \cdot 2 - \alpha} = 5 \Rightarrow \alpha = 8$$

1.2) In corrispondenza del valore di α prima determinato, calcolare tutti i possibili stati di equilibrio associati all'ingresso $\bar{u} = 1$.

A partire dalla soluzione del punto precedente si ricavano i due stati di equilibrio

$$\begin{aligned}\bar{x}_A &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} & \bar{x}_B &= \begin{bmatrix} -2 \\ -1/18 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \bar{y}_A &= 5 & \bar{y}_B &= -\frac{10}{18}\end{aligned}$$

1.3) Giudicare la stabilità degli stati di equilibrio ricavati al punto precedente.

Per valutare la stabilità degli stati di equilibrio del sistema non lineare studiamo la stabilità del sistema linearizzato in corrispondenza di tali equilibri. Indicando con $\delta x_i(t) = x_i(t) - \bar{x}_i$, $\delta u(t) = u(t) - \bar{u}$ e $\delta y(t) = y(t) - \bar{y}$ le variazioni rispetto all'equilibrio (\bar{x}, \bar{u}) , il modello linearizzato è dato da (omettendo per semplicità l'argomento t)

$$\begin{cases} \delta \dot{x}_1 = -5\bar{x}_2 \delta x_1 + (\alpha - 5\bar{x}_1) \delta x_2 + \delta u \\ \delta \dot{x}_2 = -\delta x_3 + \delta u \\ \delta \dot{x}_3 = -2\bar{x}_1 \delta x_1 + 4\delta u \\ \delta y = 10\delta x_2 \end{cases}$$

Il sistema è rappresentato nello spazio di stato dalla quaterna di matrici

$$A = \begin{bmatrix} -5\bar{x}_2 & \alpha - 5\bar{x}_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2\bar{x}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

per cui il corrispondente polinomio caratteristico della matrice A risulta

$$\det(sI - A) = \det \begin{pmatrix} s + 5\bar{x}_2 & -\alpha + 5\bar{x}_1 & 0 \\ 0 & s & 1 \\ 2\bar{x}_1 & 0 & s \end{pmatrix} = s^3 + 5\bar{x}_2 s^2 + 10\bar{x}_1^2 - 2\alpha\bar{x}_1$$

Equilibrio $\bar{x}_A = [2 \quad 1/2 \quad 1]^T$

$$\det(sI - A) = s^3 + \frac{5}{2}s^2 + 8$$

Utilizzando le condizioni necessarie e/o sufficienti non è possibile concludere nulla sulle proprietà di stabilità del sistema. Costruiamo la tabella di Routh

$$\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \hline \frac{5}{2} & 8 \\ \hline -\frac{16}{5} & \\ \hline 8 & \end{array}$$

La tabella di Routh è ben definita perchè tutti gli elementi della prima colonna sono non nulli ed il sistema è instabile perchè gli elementi della prima colonna non hanno tutti lo stesso segno. Dunque il corrispondente equilibrio del sistema non lineare è instabile.

Equilibrio $\bar{x}_B = [-2 \quad -1/18 \quad 1]^T$

$$\det(sI - A) = s^3 - \frac{5}{18}s^2 + 72$$

Dato che i coefficienti del polinomio caratteristico non hanno tutti lo stesso segno si può concludere che il sistema linearizzato è instabile. Dunque anche l'equilibrio corrispondente del sistema non lineare è instabile.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema dinamico rappresentato dallo schema a blocchi di Figura 1, dove Σ rappresenta il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad A = \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e k è una costante reale.

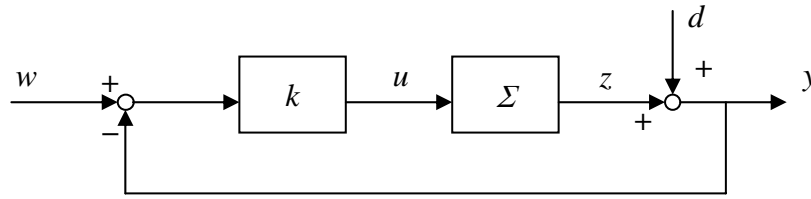


Figura 1

2.1) Determinare la costante k in modo che la funzione di trasferimento tra $w(t)$ e $y(t)$ abbia due poli reali coincidenti.

Calcoliamo la funzione di trasferimento del sistema Σ con la definizione

$$G(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+8 & -2 \\ 4 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s+8)(s+2)+8} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 2 \\ -4 & s+8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{4}{s^2 + 10s + 24}$$

La funzione di trasferimento tra $w(t)$ e $y(t)$ risulta

$$F(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)} = \frac{\frac{4k}{s^2 + 10s + 24}}{1 + \frac{4k}{s^2 + 10s + 24}} = \frac{4k}{s^2 + 10s + 4k + 24}$$

mentre i poli del sistema in anello chiuso sono dati da

$$p_{1,2} = -5 \pm \sqrt{1 - 4k}$$

Il sistema ha due poli reali coincidenti in $p_{1,2} = -5$ per

$$1 - 4k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

In definitiva, la funzione di trasferimento complessiva risulta

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 10s + 25} = \frac{1}{(s+5)^2}$$

2.2) In corrispondenza di tale valore di k , e supponendo nullo $d(t)$, calcolare la risposta di $y(t)$ a uno scalino unitario di $w(t)$ (è richiesto il calcolo dell'espressione analitica di $y(t)$ ed eventualmente un grafico con l'andamento qualitativo).

L'espressione analitica della risposta allo scalino $y(t)$ si ottiene come antitrasformata della funzione

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s(s+5)^2}$$

Utilizzando lo sviluppo di Heaviside, e tenuto conto della presenza di poli reali multipli, si può riscrivere la trasformata della risposta allo scalino come

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} + \frac{C}{(s+5)^2} = \frac{(A+B)s^2 + (10A+5B+C)s + 25A}{s(s+5)^2}$$

Successivamente, si eguagliano i coefficienti delle potenze di ugual grado

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 10A + 5B + C = 0 \\ 25A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/25 \\ B = -1/25 \\ C = -1/5 \end{cases}$$

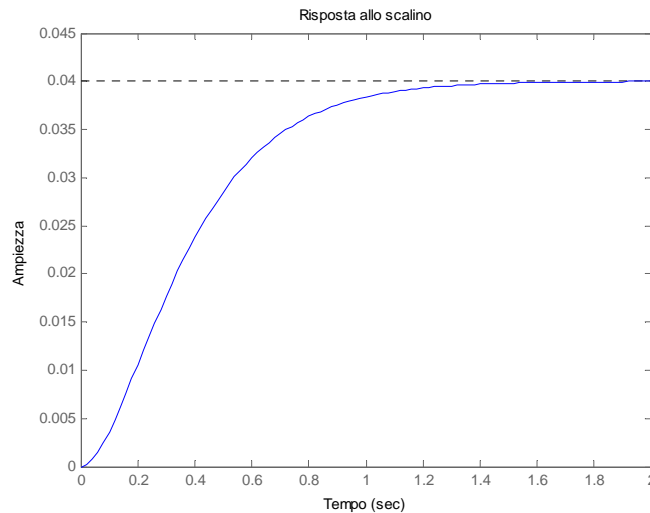
e infine antitrasformando

$$Y(s) = \frac{1}{25} \frac{1}{s} - \frac{1}{25} \frac{1}{s+5} - \frac{1}{5} \frac{1}{(s+5)^2}$$

$$\Downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$y(t) = \frac{1}{25} - \frac{1}{25} e^{-5t} - \frac{1}{5} t e^{-5t} \quad t \geq 0$$

L'andamento qualitativo della risposta allo scalino è riportato nella figura seguente. Si riconosce il classico andamento “ad S” privo di oscillazioni e con tangente nulla nell'origine, dovuto ai due poli reali ed al grado relativo pari a 2.



2.3) Sempre con lo stesso valore di k , ricavare la funzione di trasferimento tra $d(t)$ e $y(t)$, calcolandone in particolare poli, zeri e guadagno.

La funzione di trasferimento tra $d(t)$ e $y(t)$ risulta

$$S(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + kG(s)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{s^2 + 10s + 24}} = \frac{s^2 + 10s + 24}{s^2 + 10s + 25}$$

Le principali caratteristiche della funzione di trasferimento sono

- Guadagno $\mu = S(0) = 24/25$
- Poli $p_{1,2} = -5$
- Zeri $z_1 = -4 \quad z_2 = -6$

ESERCIZIO 3

Quelli riportati in Figura 2 siano i diagrammi di Bode (ricavati per via sperimentale) di un sistema asintoticamente stabile del secondo ordine con ingresso u e uscita y .

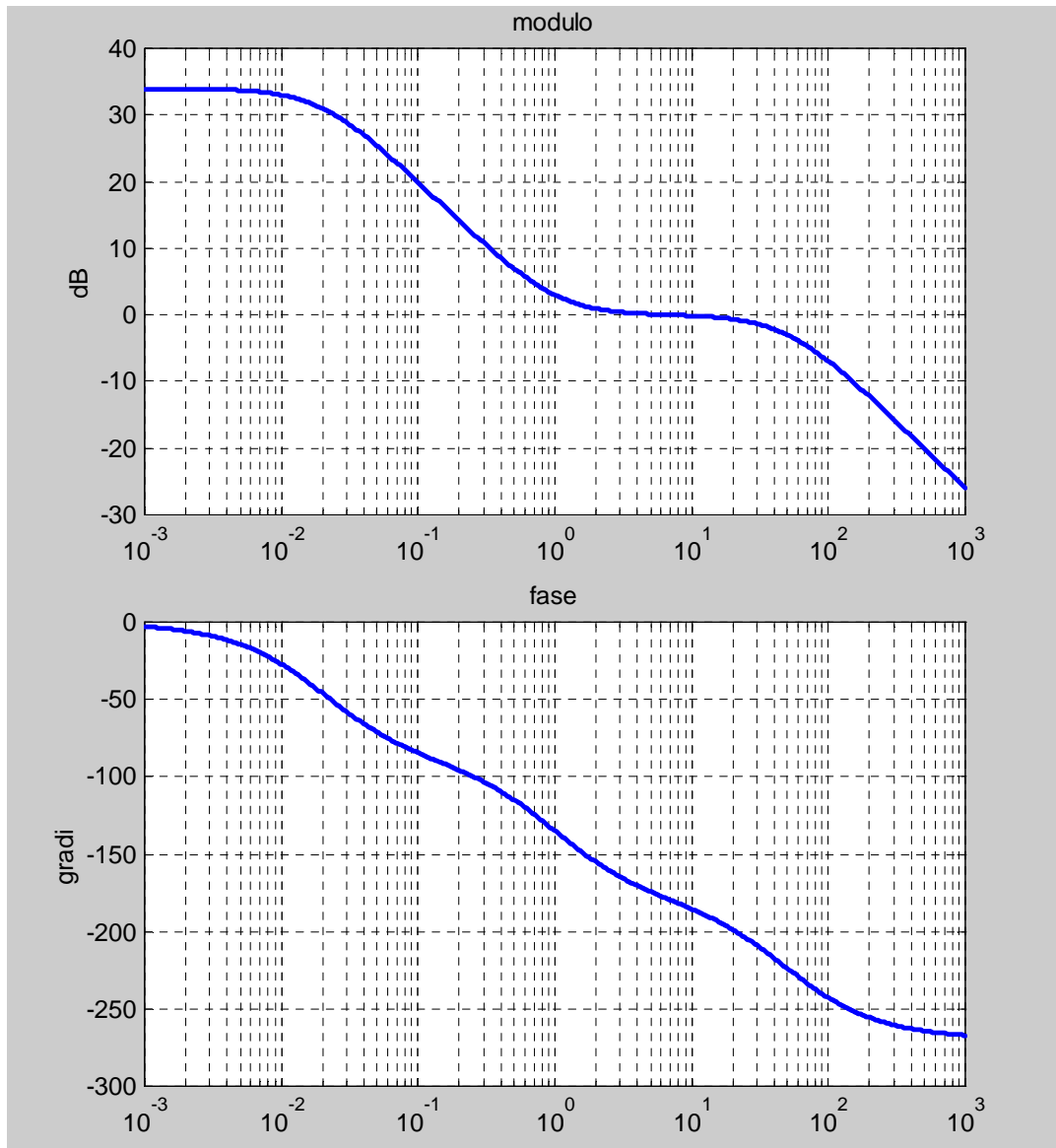


Figura 2

3.1) Sulla base di tali diagrammi valutare l'andamento asintotico dell'uscita y in risposta all'ingresso $u(t) = \sin(t)$.

In accordo con il teorema della risposta in frequenza, detta $G(s)$ la funzione di trasferimento del sistema, l'uscita del sistema presenterà un andamento del sistema con la stessa pulsazione dell'ingresso $u(t)$ asintoticamente dato da

$$y(t) = |G(j1)| \sin(1t + \angle G(j1))$$

Modulo e fase della risposta in frequenza si ricavano approssimativamente dall'analisi dei diagrammi di Bode in corrispondenza della pulsazione $\omega = 1$ rad/sec, ottenendo

$$|G(j1)| \cong 3 \text{ dB} \cong 1.4 \quad \angle G(j1) \cong -130^\circ \cong -2.27 \text{ rad}$$

La risposta asintotica del sistema risulta quindi

$$y(t) \cong 1.4 \sin(t - 2.27)$$

3.2) Sempre sulla base dei diagrammi di Figura 2, valutare, anche approssimativamente, la funzione di trasferimento del sistema.

Nella ricostruzione approssimata della funzione di trasferimento a partire dai diagrammi di Bode sperimentali si può ricavare solo una rappresentazione minima del sistema, a meno cioè di eventuali cancellazioni (o quasi cancellazioni) tra coppie di poli e zeri del sistema. Le principali caratteristiche del sistema ricavabili da tale analisi sono riassunte nella seguente tabella

Caratteristiche dei diagrammi di Bode	Caratteristiche del sistema
Il diagramma del modulo parte con pendenza nulla e il diagramma della fase parte a zero gradi	Il sistema non ha nessun polo o zero nell'origine ed il guadagno è positivo
Il valore iniziale del diagramma del modulo è pari a circa 34 dB.	Il guadagno del sistema è pari a circa $\mu \cong 34$ dB $\cong 50$
Attorno alla pulsazione di 0.02 rad/sec la pendenza passa a -20 dB/decade mentre il valore della fase diminuisce	Il sistema ha un polo nel semipiano sinistro con pulsazione $\omega \cong 0.02$ rad/sec, cioè in $p_1 = -0.02$
Attorno alla pulsazione di 1 rad/sec la pendenza passa da -20 a 0 dB/decade mentre il valore della fase diminuisce	Il sistema ha uno zero nel semipiano destro con pulsazione $\omega \cong 1$ rad/sec, cioè in $z_1 = 1$
Attorno alla pulsazione di 50 rad/sec la pendenza passa da 0 a -20 dB/decade mentre il valore della fase diminuisce	Il sistema ha un polo nel semipiano sinistro con pulsazione $\omega \cong 50$ rad/sec, cioè in $p_2 = -50$

Sulla base delle caratteristiche identificate si ricava la seguente funzione di trasferimento per il sistema

$$G(s) = 50 \frac{1-s}{(1+50s)(1+0.02s)}$$

3.3) Verificare il risultato del punto 3.1) calcolando la risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento determinata al punto 3.2).

I valori di modulo e fase della risposta in frequenza ricavati dalla funzione di trasferimento identificata risultano

$$|G(j1)| = 50 \frac{|1-j1|}{|1+50j1||1+0.02j1|} = 50 \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{1^2+50^2}\sqrt{1^2+0.02^2}} \cong 1.41$$

$$\angle G(j1) = \angle 50 + \angle(1-j1) - \angle(1+50j1) - \angle(1+0.02j1) =$$

$$= 0 - \text{atan}(1) - \text{atan}(50) - \text{atan}(0.02) \cong -2.35 \text{ rad}$$

e sono ragionevolmente vicini ai valori ricavati sperimentalmente.

3.4) Determinare le intersezioni del diagramma polare della risposta in frequenza con gli assi reale e immaginario.

Le intersezioni del diagramma polare con gli assi si ricavano andando a cercare i punti sui diagrammi di Bode con fase pari a 0° , -90° , -180°

$$\begin{array}{lll}
\angle G(j\omega) = 0^\circ & \omega \cong 0 \text{ rad/sec} & |G(j\omega)| \cong 50 \\
\angle G(j\omega) = -90^\circ & \omega \cong 0.15 \text{ rad/sec} & |G(j\omega)| \cong 7.1 \\
\angle G(j\omega) = -180^\circ & \omega \cong 8.5 \text{ rad/sec} & |G(j\omega)| \cong 1
\end{array}$$

Equivalentemente è possibile ricavare tali punti dall'espressione analitica della risposta in frequenza.

3.5) Si supponga ora che l'ingresso $u(t)$ sia un'onda quadra che oscilla tra $+1$ e -1 con periodo $T = 0.5$. Si dica come si potrebbero usare i diagrammi della Figura 2 per valutare l'andamento a transitorio esaurito dell'uscita $y(t)$.

Dal momento che l'ingresso $u(t)$ è periodico, può essere rappresentato attraverso il suo sviluppo in serie di Fourier come

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n e^{j\omega_n t} \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T} \cong 12.56n \text{ rad/sec}$$

dove i coefficienti U_n descrivono il contributo delle varie armoniche alla formazione del segnale. L'uscita del sistema a transitorio esaurito (dato che il sistema è asintoticamente stabile) sarà anch'essa periodica e data da

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n e^{j\omega_n t} \quad Y_n = G(j\omega_n) U_n \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T}$$

Dall'esame del diagramma del modulo si deduce che la prima armonica ($n = \pm 1$) subisce un'amplificazione circa unitaria, mentre le armoniche successive vengono attenuate.

Dal diagramma della fase si deduce inoltre che la prima armonica viene sfasata di circa -180° , e risulta pertanto "in controfase"

La risposta del sistema all'onda quadra ottenuta in simulazione è riportata nella seguente figura.

