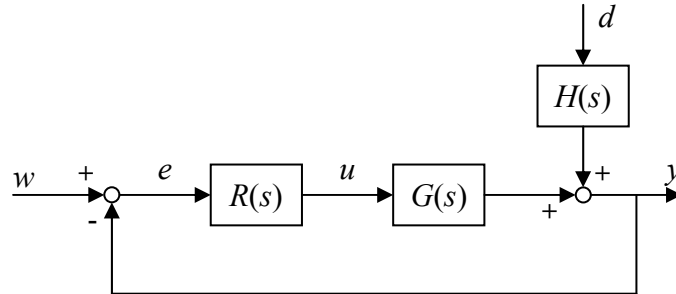


Fondamenti di automatica – Laurea on Line
Prova in itinere PI02 – A.A. 2003/04
Traccia della soluzione

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema di controllo mostrato in figura



dove $G(s) = \frac{100e^{-\tau}(1 + 0.05s)}{(1 + 0.1s)(1 + s)}$, $H(s) = \frac{0.5}{1 + s}$

Si supponga inizialmente $\tau = 0$.

1.1) Progettare un regolatore $R(s)$ con struttura PI in modo che siano rispettate le seguenti specifiche:

- $|e(\infty)| = 0$ quando $d(t) = \pm 10 \text{ sca}(t)$
- $|e(\infty)| \leq 0.2$ quando $d(t) = \sin(\omega t)$, $0 < \omega < 0.1$
- pulsazione critica $\omega_c \geq 0.6$
- margine di fase $\phi_m \geq 45^\circ$

Consideriamo un regolatore PI espresso nella forma

$$R(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = \frac{K}{T_i} \frac{1 + T_i s}{s} = \mu_R \frac{1 + T_i s}{s}$$

dove per semplicità si è posto $\mu_R = K/T_i$.

Il progetto del regolatore sarà articolato in tre fasi: per prima cosa si verificherà se il regolatore PI permette di soddisfare le specifiche statiche, successivamente si tradurranno i vincoli sulle prestazioni del sistema in vincoli sul diagramma di Bode della funzione d'anello, infine si fisseranno i parametri del regolatore in modo da rispettare tutti i vincoli.

Progetto statico

Verifichiamo se il regolatore PI permette di soddisfare le specifiche statiche sull'errore a transitorio esaurito (ipotizzando che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile al termine della sintesi). La funzione di trasferimento tra $d(t)$ e $y(t)$ vale

$$T(s) = \frac{H(s)}{1 + R(s)G(s)}$$

mentre il valore assoluto dell'errore a transitorio esaurito in risposta ad uno scalino di ampiezza A_d vale

$$\lim_{s \rightarrow 0} s T(s) \frac{A_d}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{H(0)}{1 + \frac{\mu_R}{s} G(0)} A_d = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{0.5s}{s + 100\mu_R} A_d = 0$$

indipendentemente da μ_R . La specifica statica è quindi soddisfatta dal regolatore di tipo PI.

Analisi dei vincoli

Cerchiamo di trasformare il vincolo sull'errore dovuto ad un disturbo sinusoidale in un vincolo sul diagramma di Bode della funzione d'anello $L(s)$.

Perché sia rispettato il vincolo $|e(\infty)| \leq 0.2$ quando $d(t) = \sin(\omega t)$ con $0 < \omega < 0.1$, il modulo della risposta in frequenza della funzione di trasferimento tra $d(t)$ e $y(t)$ deve soddisfare la seguente relazione

$$|T(j\omega)| = \frac{|H(j\omega)|}{|1 + R(j\omega)G(j\omega)|} = \frac{|H(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \leq -14 \text{ dB} \quad , \quad 0 < \omega < 0.1$$

Nella banda di pulsazioni in cui è concentrato il disturbo (inferiore alla pulsazione critica ω_c) risulta $|L(j\omega)| > 1$, ovvero $|1 + L(j\omega)| \cong |L(j\omega)|$. Inoltre dal diagramma di Bode asintotico di $H(s)$ (Fig. 1) si nota che, in prima approssimazione, $|H(j\omega)| \cong -6 \text{ dB}$ per $0 < \omega < 0.1$.

Il vincolo precedente quindi si trasforma nel seguente vincolo sul modulo della $L(s)$

$$\begin{aligned} |T(j\omega)|_{dB} &\cong |H(j\omega)|_{dB} - |L(j\omega)|_{dB} \leq -14 \text{ dB} \quad , \quad 0 < \omega < 0.1 \\ &\Downarrow \\ |L(j\omega)|_{dB} &\geq 8 \text{ dB} \quad , \quad 0 < \omega < 0.1 \end{aligned}$$

Il diagramma di Bode del modulo della funzione d'anello deve quindi trovarsi al di fuori delle zone ombreggiate (Fig. 2).

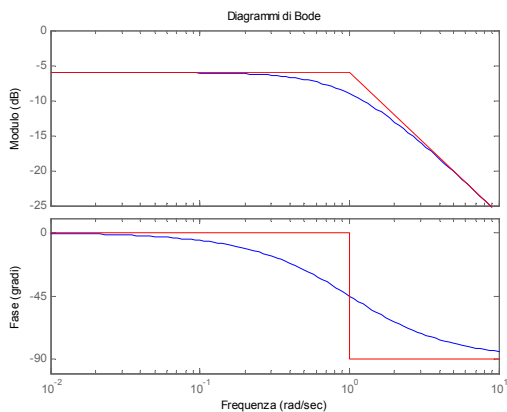


Fig. 1

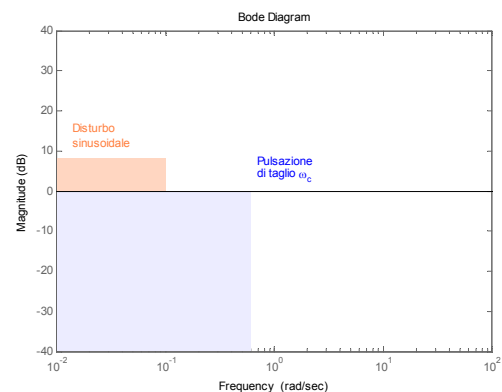


Fig. 2

Progetto del regolatore

Come prima ipotesi proviamo a cancellare il polo più in bassa frequenza con lo zero del regolatore e fissiamo il guadagno in modo da ottenere una pulsazione di taglio $\omega_c \cong 2 \text{ rad/s}$ sul diagramma di Bode asintotico del modulo. Il regolatore risulta

$$R(s) = 0.02 \frac{1+s}{s}$$

mentre in Fig. 3 è rappresentato il diagramma di Bode della funzione d'anello

$$L(s) = \frac{2(1+0.05s)}{s(1+0.1s)}$$

Il margine di fase ϕ_m vale

$$\phi_m = 180^\circ + \angle L(j\omega_c) = 180^\circ + (\text{atan}(0.05\omega_c) - 90^\circ - \text{atan}(0.1\omega_c)) \cong 84^\circ$$

Entrambi i vincoli sulla pulsazione di taglio e sul margine di fase sono quindi soddisfatti (unitamente al vincolo sull'attenuazione del disturbo sinusoidale e sul disturbo a scalino).

In definitiva i parametri del regolatore PI risultano

$$K = 0.02 \quad T_i = 1$$

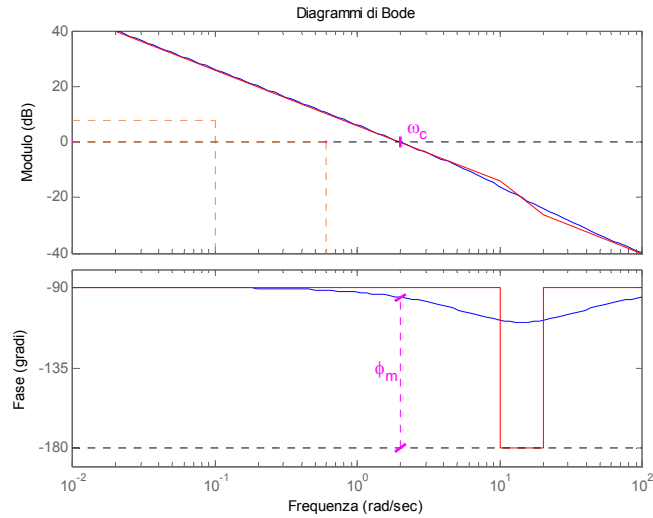


Fig. 3

1.2) A progetto ultimato, valutare il margine di guadagno k_m

Il margine di guadagno $k_m = \infty$, dal momento che la pulsazione critica ω_π a cui $\angle L(j\omega_\pi) = -180^\circ$ non è definita.

1.3) In corrispondenza del progetto precedente, discutere qual è il valore del ritardo τ che fa perdere stabilità al sistema.

La presenza di un ritardo di tempo nell'anello non altera il diagramma di Bode del modulo, ma introduce uno sfasamento negativo aggiuntivo che cresce linearmente con la pulsazione. Al crescere del ritardo si riduce il margine di fase del sistema retroazionato, che diventerà instabile quando il margine di fase diventa minore di zero. Il massimo ritardo tollerato è quello per cui lo sfasamento aggiuntivo in corrispondenza della pulsazione critica ω_c è pari al margine di fase ovvero

$$\tau_{\max} = \frac{\pi}{180} \frac{\phi_m}{\omega_c} \cong 0.73 \text{ s}$$

1.4) Supponendo di dover utilizzare un trasduttore rumoroso della variabile controllata y , valutare in quale banda di pulsazioni dovrebbe essere confinato lo spettro del rumore di misura perchè il sistema progettato al punto 1.1 fornisca ancora buone prestazioni.

La funzione di trasferimento tra un rumore di misura $n(t)$ sulla linea di retroazione e $y(t)$ è data a parte il segno da $F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$, che in prima approssimazione è approssimabile con

un filtro passa-basso, infatti $|F(j\omega)| \cong 1$, $\omega < \omega_c$ e $|F(j\omega)| \cong |L(j\omega)| < 1$, $\omega > \omega_c$. Perchè il rumore di misura venga attenuato dovrà essere concentrato in una banda di pulsazioni superiore a ω_c , inoltre il regolatore si comporterà tanto meglio quanto maggiore è l'attenuazione del rumore.

Ad esempio supponendo di richiedere un'attenuazione del rumore di misura maggiore o uguale a 40 dB il regolatore progettato potrà tollerare un rumore concentrato nella banda $[100, \infty)$.

1.5) Ricavare una versione digitale del regolatore analogico progettato.

Iniziamo con la scelta di un valore opportuno della pulsazione di campionamento. Una regola empirica suggerisce la scelta di una pulsazione di campionamento ω_s nell'intervallo

$$5\omega_c \leq \omega_s \leq 50\omega_c$$

a cui corrisponde un periodo di campionamento

$$\frac{2\pi}{50\omega_c} \leq T_s \leq \frac{2\pi}{5\omega_c}$$

ovvero approssimativamente $0.062 \text{ s} \leq T_s \leq 0.62 \text{ s}$. Possiamo scegliere ad esempio $T_s = 0.25 \text{ s}$, ottenendo con il metodo di discretizzazione di Eulero in avanti

$$R^*(z) = 0.02 \frac{1 + (z-1)/T_s}{(z-1)/T_s} = 0.02 \frac{z + (T_s - 1)}{z - 1} = 0.02 \frac{z - 0.75}{z - 1}$$

Confrontando i diagrammi di Bode di $R(s)$ e $R^*(z)$ si nota un'ottima aderenza (Fig. 4).

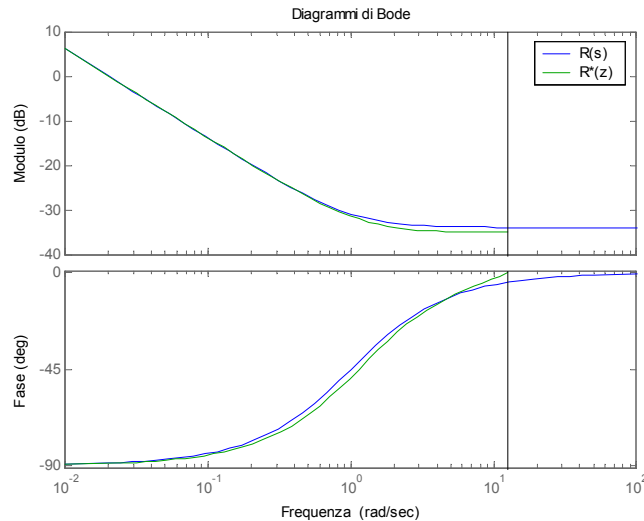
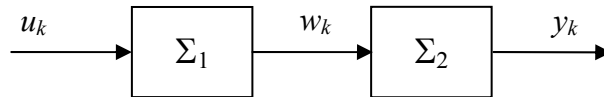


Fig. 4

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto descritto dallo schema a blocchi in figura



dove Σ_1 e Σ_2 sono due sistemi dinamici lineari descritti dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : \quad w_{k+1} &= -2w_k + 2u_k \\ \Sigma_2 : \quad Y(z) &= \frac{10}{2z-1} W(z) \end{aligned}$$

Indicando con $G_1(z)$ e $G_2(z)$ le funzioni di trasferimento dei due sottosistemi Σ_1 e Σ_2 risulta

$$\begin{aligned} G_1(z) &= \frac{W(z)}{U(z)} = \frac{2}{z+2} \\ G_2(z) &= \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{10}{2z-1} \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento complessiva dall'ingresso u_k all'uscita y_k risulta quindi

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{20}{(2z-1)(z+2)} = \frac{20}{2z^2 + 3z - 2}$$

2.1) Determinare l'uscita di equilibrio \bar{y} in corrispondenza dell'ingresso $\bar{u} = 1$.

L'uscita di equilibrio di un sistema a tempo discreto soggetto ad un ingresso costante $u_k = \bar{u}$ si calcola a partire dalla definizione di guadagno

$$\bar{y} = G(1)\bar{u} = \frac{20}{2+3-2}1 = \frac{20}{3}$$

2.2) Studiare la stabilità della condizione di equilibrio così determinata.

La stabilità di un sistema a tempo discreto dipende dal modulo degli autovalori. Nel nostro caso gli autovalori coincidono con i poli della funzione di trasferimento dal momento che non si sono state cancellazioni poli-zeri, ovvero

$$\begin{cases} z_1 = 0.5 \\ z_2 = -2 \end{cases}$$

Dato che $|z_2| > 1$ il sistema Σ è instabile e quindi risulta instabile anche l'equilibrio trovato.

2.3) Ricavare l'equazione alle differenze (cioè la forma ARMA) che lega tra loro l'ingresso u_k e l'uscita y_k .

L'equazione alle differenze si ricava moltiplicando numeratore e denominatore della funzione di trasferimento per z^{-2}

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{20z^{-2}}{2 + 3z^{-1} - 2z^{-2}} \\ (2 + 3z^{-1} - 2z^{-2})Y(z) &= 20z^{-2}U(z) \\ Y(z) &= -1.5z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) + 10z^{-2}U(z) \end{aligned}$$

Ricordando che l'operatore z^{-1} rappresenta l'operatore di ritardo unitario nel dominio del tempo, si ottiene antitrasformando

$$y_k = -1.5y_{k-1} + y_{k-2} + 10u_{k-2}$$

2.4) Calcolare i primi valori (per k da 0 a 5) della risposta del sistema ad uno scalino unitario.

Calcoliamo i campioni della risposta allo scalino direttamente dall'equazione alle differenze $y_k = -1.5y_{k-1} + y_{k-2} + 10u_{k-2}$, ricordando che l'ingresso a scalino vale

$$u_k = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$

e supponendo che $y_k = 0$ per $k < 0$.

I campioni della risposta allo scalino sono

$$\begin{aligned} y_0 &= -1.5y_{-1} + y_{-2} + 10u_{-2} = 0 \\ y_1 &= -1.5y_0 + y_{-1} + 10u_{-1} = 0 \\ y_2 &= -1.5y_1 + y_0 + 10u_0 = 10 \\ y_3 &= -1.5y_2 + y_1 + 10u_1 = -5 \\ y_4 &= -1.5y_3 + y_2 + 10u_2 = 27.5 \\ y_5 &= -1.5y_4 + y_3 + 10u_3 = -36.25 \end{aligned}$$