

Fondamenti di automatica – Laurea on Line
Prova in itinere PI01 – A.A. 2003/04

ESERCIZIO 1

Si consideri il levitatore magnetico descritto approssimativamente dal seguente modello matematico

$$\ddot{y} = g - k \frac{i^2}{y^2}.$$

1.1) Determinare la posizione di equilibrio della sfera quando la corrente assume un valore costante $\bar{i} > 0$

Ponendo $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $u = i$ si può scrivere il modello non lineare nello spazio di stato come

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g - k \frac{u^2}{x_1^2} \\ y = x_1 \end{cases}$$

Calcoliamo il punto di equilibrio corrispondente all'ingresso $\bar{u} = \bar{i}$ risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_2 \\ 0 = g - k \frac{\bar{u}^2}{\bar{x}_1^2} \\ \bar{y} = \bar{x}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_1 = \pm \sqrt{k/g} \bar{u} \\ \bar{y} = \bar{x}_1 = \pm \sqrt{k/g} \bar{u} \end{cases}$$

Ovviamente dei due equilibri trovati solo quello con segno positivo ha senso fisico, quindi

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{k/g} \bar{u} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{y} = \sqrt{k/g} \bar{u}$$

Alternativamente si sarebbe potuto calcolare l'equilibrio direttamente dal modello originale ponendo $\ddot{y} = 0$, e risolvendo l'equazione $0 = g - k \frac{\bar{u}^2}{\bar{y}^2}$.

1.2) Ricavare un modello linearizzato nell'intorno della condizione di equilibrio prima individuata.

Posto $\delta x = x - \bar{x}$, $\delta u = u - \bar{u}$, $\delta y = y - \bar{y}$ il modello linearizzato nell'intorno dell'equilibrio (\bar{x}, \bar{u}) è dato da

$$\begin{cases} \delta \ddot{x}_1 = \delta \ddot{x}_2 \\ \delta \ddot{x}_2 = 2k \frac{u^2}{x_1^3} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x_1 - 2k \frac{u}{x_1^2} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u = \frac{2g}{\bar{u}} \sqrt{\frac{g}{k}} \delta x_1 - \frac{2g}{\bar{u}} \delta u \\ \delta y = \delta x_1 \end{cases}$$

In forma matriciale il sistema linearizzato è rappresentato dalla quaterna di matrici

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\bar{u}} \sqrt{\frac{g}{k}} & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2g}{\bar{u}} \end{bmatrix} \\ C &= [1 \quad 0] & D &= 0 \end{aligned}$$

1.3) Verificare che lo stato di equilibrio considerato è instabile.

Per valutare la stabilità dello stato di equilibrio del sistema non lineare studiamo la stabilità del sistema linearizzato in corrispondenza di tale equilibrio. Il polinomio caratteristico della matrice A risulta

$$\det(sI - A) = \det \begin{pmatrix} s & -1 \\ -\frac{2g}{\bar{u}} \sqrt{\frac{g}{k}} & s \end{pmatrix} = s^2 - \frac{2g}{\bar{u}} \sqrt{\frac{g}{k}}$$

Dal momento che il polinomio caratteristico non ha tutti i coefficienti concordi (condizione necessaria nel caso $n = 2$) possiamo concludere che ha una radice con parte reale positiva, come è del resto facile da verificare. Quindi il corrispondente equilibrio del sistema non lineare è instabile.

1.4) Confrontare i due modelli (quello non lineare di partenza e quello linearizzato) in condizioni statiche. In particolare si chiede di valutare con i due modelli qual è la posizione di equilibrio quando la corrente di alimentazione è costante e pari $\bar{i} + \Delta i$.

Calcoliamo l'uscita di equilibrio del sistema non lineare corrispondente all'ingresso $\bar{i} + \Delta i$ risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_2 \\ 0 = g - k \frac{(\bar{i} + \Delta i)^2}{\bar{x}_1^2} \\ \bar{y} = \bar{x}_1 \end{cases} \Rightarrow \bar{y}_{nl} = \sqrt{\frac{k}{g}} (\bar{i} + \Delta i)$$

Per calcolare l'uscita di equilibrio del sistema linearizzato ricordiamo che $\delta y = \mu \delta u$, dove

$$\mu = -CA^{-1}B + D = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\bar{i}}{2g} \sqrt{\frac{k}{g}} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2g}{\bar{i}} \end{bmatrix} + 0 = \sqrt{\frac{k}{g}}$$

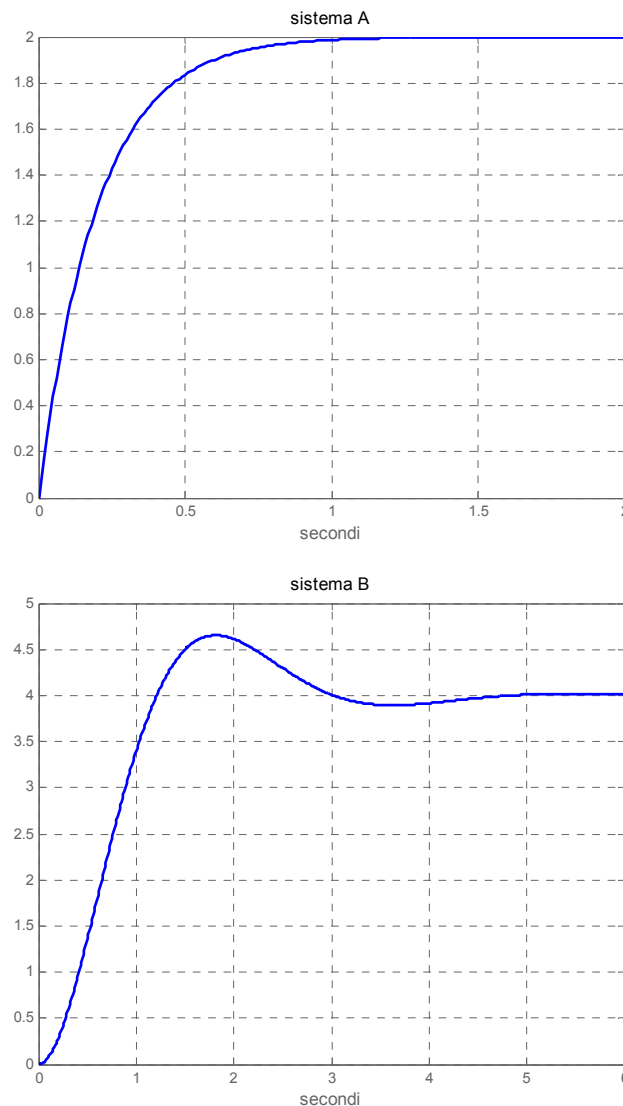
Tenuto conto del significato di δx , δy si ricava quindi

$$y_{lin} = \bar{y} + \delta y = \bar{y} + \mu \delta u = \bar{y} + \mu(u - \bar{u}) = \sqrt{\frac{k}{g}} \bar{i} + \sqrt{\frac{k}{g}} (\bar{i} + \Delta i - \bar{i}) = \sqrt{\frac{k}{g}} (\Delta i + \bar{i})$$

Si noti che i due risultati sono identici. In generale però questa cosa non è vera, perchè il modello linearizzato è solo un'approssimazione locale del modello non lineare.

ESERCIZIO 2

Si considerino le risposte ad uno scalino unitario di due diversi sistemi lineari



2.1) Determinare, anche approssimativamente, le due corrispondenti funzioni di trasferimento $G_A(s)$ e $G_B(s)$.

Procedura di identificazione per il primo sistema

Dall'analisi del valore di regime della risposta a scalino si ricava il tipo del processo $g = 0$ (cioè non ci sono zeri o poli nell'origine) ed il guadagno statico $\mu_A = 2$.

Dal momento che la prima derivata non nulla è la derivata prima possiamo concludere che il sistema ha grado relativo pari a 1, ovvero che il sistema ha un unico polo poichè per ipotesi non ci sono zeri. Il polo è chiaramente reale.

La sua funzione di trasferimento sarà quindi del tipo

$$G_A(s) = \frac{2}{1 + sT}$$

dove il valore del parametro T può essere calcolato ricordando che per un sistema del primo ordine con un solo polo reale il tempo di assestamento al 5% risulta pari a $3T$, oppure che vale la relazione $y(T) \cong 0.63y_\infty$.

Dunque, il primo sistema è approssimativamente descritto dalla funzione di trasferimento

$$G_A(s) = \frac{2}{1 + 0.2s}$$

Procedura di identificazione per il secondo sistema

La risposta del secondo sistema presenta delle oscillazioni, che suggeriscono chiaramente la presenza di almeno una coppia di poli complessi coniugati. La funzione di trasferimento più semplice in grado di spiegare questo comportamento risulta (tenendo conto del guadagno)

$$G_B(s) = \frac{4}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2}$$

I due parametri rimanenti possono essere calcolati partendo dal periodo di oscillazione (pari a circa 3.6 sec) e dall'ampiezza della massima sovraelongazione (pari a circa 0.15), da cui si ricava

$$\Delta = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \xi = \sqrt{\frac{(\ln \Delta)^2}{\pi^2 + (\ln \Delta)^2}} \cong 0.5$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-\xi^2}} \cong 2$$

Alternativamente si sarebbe potuto ricavare una delle due equazioni dalla formula del tempo di assestamento $t_a \cong \frac{5}{\omega_n\xi}$. In definitiva, quindi, il sistema può essere approssimativamente descritto dalla funzione di trasferimento

$$G_B(s) = \frac{4}{1 + 0.5s + 0.25s^2}$$

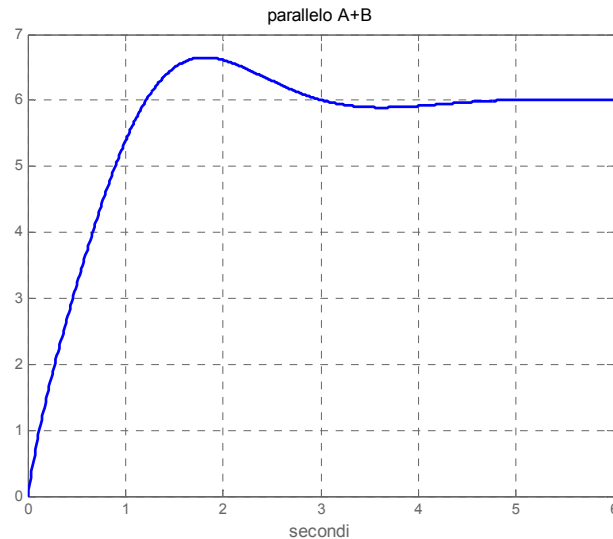
2.2) Valutare quale sarebbe la risposta allo scalino di un sistema composto dal parallelo di $G_A(s)$ e $G_B(s)$

La funzione di trasferimento del parallelo dei due sistemi vale $G_P(s) = G_A(s) + G_B(s)$. La risposta a scalino del sistema complessivo sarà quindi data dalla somma delle risposte a scalino dei due sistemi. Per valutare le caratteristiche di tale risposta possiamo procedere mediante antitrasformazione, oppure in maniera qualitativa tramite delle semplici considerazioni.

Scegliamo ad esempio la seconda strada ed osserviamo che:

- Il valore di regime sarà pari alla somma dei valori di regime dei due sottosistemi
 $\mu_P = \mu_A + \mu_B = 6$
- In prima approssimazione il tempo di assestamento sarà comparabile con quello del sistema B.

Il tracciamento della risposta a scalino conferma queste previsioni qualitative.

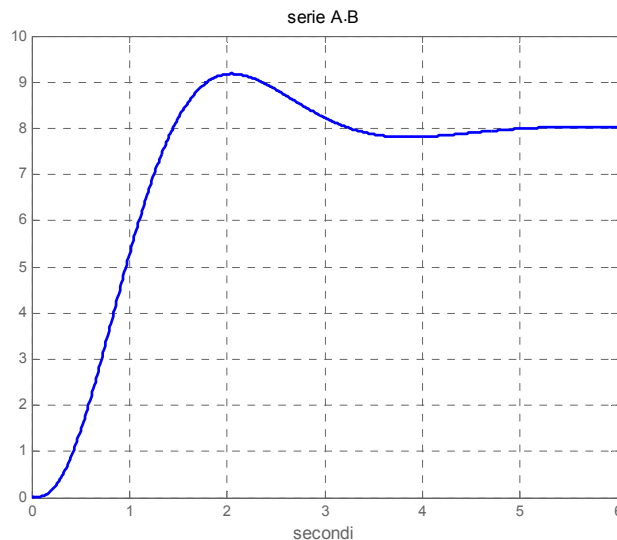


2.3) Valutare quale sarebbe la risposta allo scalino di un sistema composto dalla serie di $G_A(s)$ e $G_B(s)$

La funzione di trasferimento della serie dei due sistemi vale $G_P(s) = G_A(s)G_B(s)$. Procedendo in maniera analoga al punto precedente osserviamo che:

- Il valore di regime sarà pari al prodotto dei valori di regime dei due sottosistemi $\mu_P = \mu_A \mu_B = 8$
- Il sistema avrà una coppia di poli complessi coniugati (dominante) ed un polo reale, per cui la risposta allo scalino presenterà delle oscillazioni ed avrà un tempo di assestamento comparabile con quello del sistema B .

Ancora una volta il tracciamento della risposta a scalino conferma queste previsioni qualitative.



ESERCIZIO 3

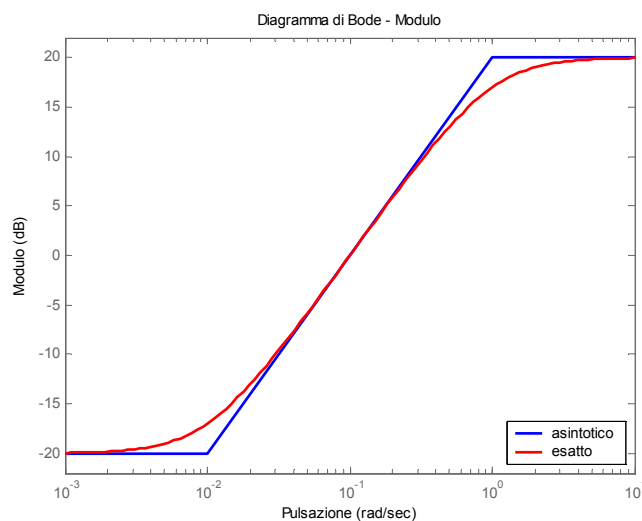
Si consideri il sistema con ingresso u e uscita y descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{0.1(1+100s)}{1+s}.$$

3.1) Tracciare l'andamento qualitativo del diagramma di Bode del modulo associato a $G(s)$.

Il guadagno del sistema vale $\mu = G(0) = 0.1 = -20 \text{ dB}$. Il sistema possiede uno zero in -0.01 (pulsazione 0.01 rad/s) ed un polo in -1 (pulsazione 1 rad/s).

Il diagramma asintotico del modulo parte con pendenza nulla e ordinata pari a -20 dB . Alla pulsazione di 0.01 rad/s la pendenza passa a $+20 \text{ dB/decade}$ per effetto dello zero, mentre alla pulsazione di 1 rad/s la pendenza ritorna a 0 dB/decade per effetto del polo. Dato che il polo e lo zero sono reali lo scostamento del diagramma effettivo da quello asintotico sarà abbastanza contenuto.



3.2) Dal punto di vista dell'azione filtrante, specificare se il sistema si comporta da filtro passa-basso o passa-alto, e valutare la sua banda passante.

Il sistema si comporta come un filtro passa-alto con banda passante pari a circa $[1, \infty)$.

3.3) Calcolare l'ampiezza dell'uscita a transitorio esaurito quando l'ingresso vale $u(t) = \sin(0.1t)$ oppure $u(t) = \sin(10t)$.

Per il teorema della risposta in frequenza l'ampiezza Y della sinusoide in uscita a transitorio esaurito vale rispettivamente

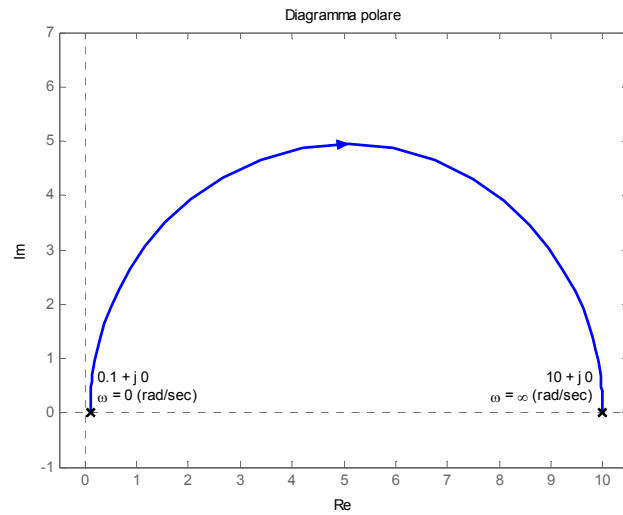
$$Y_1 = |G(j0.1)| = \frac{0.1 |1 + 100 \cdot j0.1|}{|1 + j0.1|} = 1$$

$$Y_2 = |G(j10)| = \frac{0.1 |1 + 100 \cdot j10|}{|1 + j10|} = 9.95$$

I valori ottenuti sono estremamente vicini a quelli ricavabili direttamente dal digramma di Bode asintotico (pari a 1 e 10 rispettivamente).

3.4) Tracciare l'andamento qualitativo del diagramma polare associato a $G(s)$.

Il diagramma polare si può calcolare a partire dai diagrammi di Bode di modulo e fase.



Il diagramma polare parte dal punto 0.1 del piano complesso alla pulsazione $\omega = 0$ ed arriva nel punto 10 alla pulsazione $\omega = \infty$.