

Fondamenti di automatica – Laurea on Line
Prova in itinere PI02 – A.A. 2002/03
Traccia della soluzione

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema di controllo in anello chiuso di Fig. 1, dove il sistema da controllare è descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{3.5}{(1 + 2s)^2(1 + 0.02s)}$$

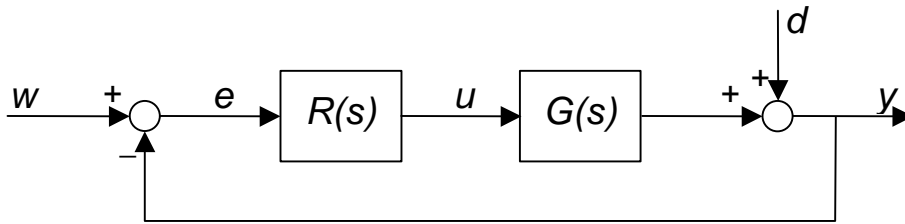
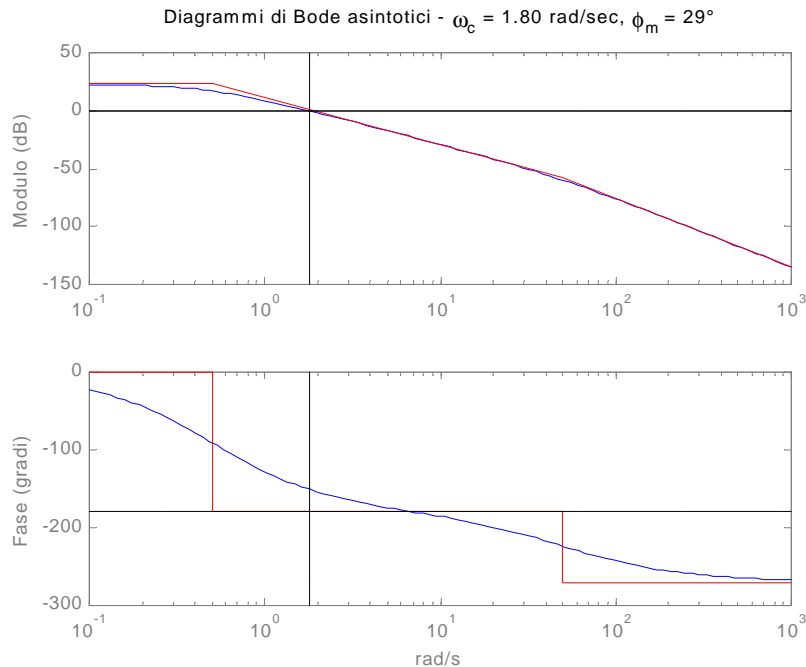


Fig. 1

Inizialmente si supponga che il regolatore $R(s)$ sia un controllore ad azione puramente proporzionale con guadagno $K_p = 4$. Valutare le prestazioni del sistema di controllo.

Si tracci il diagramma di Bode della funzione d'anello $L(s) = R(s)G(s) = K_p G(s)$

$$L(s) = \frac{14}{(1 + 2s)^2(1 + 0.02s)}$$



(a) Asintotica stabilità

Poiché la funzione d'anello $L(s)$ non ha poli con parte reale maggiore di zero e il suo diagramma di Bode attraversa una sola volta l'asse 0 dB è applicabile il criterio di Bode. Il sistema retroazionato risulta asintoticamente stabile in quanto il guadagno d'anello $m_L = 14 > 0$ ed il margine di fase $j_m = 29^\circ > 0^\circ$.

(b) Pulsazione critica

La pulsazione critica ω_c , in corrispondenza della quale $|L(j\omega_c)| = 1$, vale

$$\omega_c \cong 1.80 \text{ rad/s}$$

(c) Margine di fase

Il margine di fase $j_m = \angle L(j\omega_c)$ vale

$$j_m \cong 29^\circ$$

(d) Tempo di assestamento in risposta ad un riferimento w a scalino

Dal momento che $j_m < 75^\circ$ la funzione di trasferimento tra riferimento ed uscita può essere approssimata con un sistema del secondo ordine con due poli complessi coniugati con

pulsazione naturale ω_c e smorzamento $\zeta \cong \frac{j_m}{100} = 0.29$. Il tempo di assestamento sarà quindi

$$t_a \cong \frac{5}{\omega_c \zeta} = 9.6 \text{ s}$$

(e) Valore di regime dell'uscita y in risposta ad un riferimento a scalino $w(t) = A \text{ sca}(t)$

Dal momento che la funzione d'anello non contiene alcun integratore ci si aspetta un errore a transitorio esaurito non nullo, ovvero un valore di regime y_∞ diverso dall'ampiezza dello scalino A .

La funzione di trasferimento tra riferimento ed uscita vale $F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$, per cui dal teorema del valore finale si ottiene (ricordando che il tipo della funzione d'anello $g = 0$)

$$y_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{L(s)}{1 + L(s)} \frac{A}{s} = \frac{m_0}{1 + m_0} A = \frac{14}{15} A$$

(f) Capacità di attenuare l'effetto del disturbo $d(t) = \sin(0.5t)$

La funzione di trasferimento tra disturbo ed uscita vale $S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$, quindi, detta $y_d(t)$ la risposta al disturbo, applicando il teorema della risposta in frequenza si ottiene

$$y_d(t) = |S(j0.5)| \sin(0.5t + \angle S(j0.5))$$

È necessario valutare la capacità del sistema di attenuare il disturbo per cui è sufficiente valutare

$$|S(j0.5)| = \left| \frac{1}{1 + L(j0.5)} \right| = 0.1416 \cong -17 \text{ dB}$$

Una soluzione alternativa consiste nel dedurre l'attenuazione a partire dal diagramma di Bode. Per $\omega < \omega_c$, $|S(j\omega)|$ può essere approssimato con $\left| \frac{1}{L(j\omega)} \right| = -|L(j\omega)|_{\text{dB}}$. Il diagramma di Bode asintotico fornisce un valore di $|L(j0.5)|$ pari a 23 dB, per cui il disturbo dovrebbe essere attenuato di un fattore pari a circa -23 dB. In realtà, bisogna considerare lo scostamento del diagramma di Bode reale da quello asintotico, che in corrispondenza di una coppia di poli (reali) è circa pari a -6 dB, per cui in realtà $|L(j0.5)| \cong 17 \text{ dB}$ e la corrispondente attenuazione risulta pari a -17dB.

(g) Capacità di tollerare un eventuale ritardo aggiuntivo $t = 0.6$ lungo l'anello senza perdere la stabilità

La presenza di un ritardo di tempo nell'anello non altera il diagramma di Bode del modulo, ma introduce uno sfasamento negativo aggiuntivo che cresce linearmente con la pulsazione.

Lo sfasamento aggiuntivo in corrispondenza della pulsazione critica vale $-w_c t \frac{180}{p} \cong -62^\circ$, dunque il margine di fase diventa

$$j_m = 29^\circ - 62^\circ = -33^\circ$$

Poiché il margine di fase è negativo il sistema retroazionato non è stabile (criterio di Bode). Questo risultato è confermato dal fatto che il massimo ritardo tollerato all'interno dell'anello

$$t_{\max} < \frac{p}{180} \frac{j_m}{w_c} \cong 0.28 \text{ s} < 0.6 \text{ s}$$

ESERCIZIO 2

Progettare il controllore $R(s)$ (di ordine minimo possibile) in modo che siano contemporaneamente rispettate le seguenti specifiche:

- (a) errore a transitorio esaurito nullo in presenza di un riferimento w a scalino
- (b) pulsazione critica $w_c > 0.5 \text{ rad/s}$
- (c) margine di fase $j_m > 30^\circ$

(N.B. Il progetto del regolatore non ha una soluzione unica, e tutte le soluzioni che rispettano le specifiche sono accettabili. Vengono però preferite soluzioni in cui l'ordine del regolatore è minimo (pari a 1), considerando l'esplicita richiesta nelle specifiche.)

Per il progetto è comodo fattorizzare il regolatore come $R(s) = R_1(s)R_2(s)$.

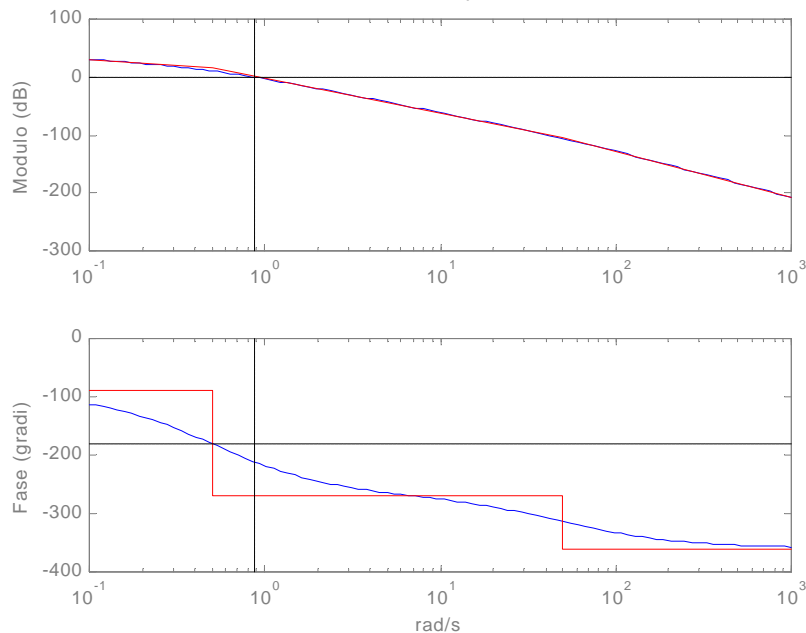
Per prima cosa si realizza il progetto statico, cioè si sceglie $R_1(s) = \frac{m_R}{s^r}$ in modo da soddisfare le specifiche statiche (ipotizzando che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile al termine della sintesi).

Per avere un errore nullo a transitorio esaurito con un riferimento a scalino è necessario che il tipo della funzione d'anello sia maggiore di zero. Se scegliamo $r = 1$ risulta $e_\infty = 0$ indipendentemente dal guadagno del regolatore m_R , che resta quindi un parametro libero.

Poniamo $m_R = 1$ e $R_2(s) = 1$ e tracciamo il diagramma di Bode della funzione

$$L'(s) = R_1(s)G(s) = \frac{3.5}{s(1+2s)^2(1+0.02s)}$$

Diagrammi di Bode asintotici - $\omega_c = 0.87 \text{ rad/sec}$, $\phi_m = -31^\circ$



Il valore della pulsazione critica (0.87) è superiore al valore minimo richiesto (0.5), ma il margine di fase risulta negativo, per cui il sistema retroazionato non sarà stabile.

Dal diagramma di Bode della funzione d'anello si vede che lo sfasamento alla pulsazione critica minima è già pari a -180° , per effetto dell'integratore e dei due poli a bassa frequenza (la cui pulsazione coincide con la pulsazione critica minima). Dunque anche modificando il valore del guadagno non è possibile soddisfare contemporaneamente i vincoli sulla pulsazione critica e sul margine di fase.

Nel progetto della parte dinamica $R_2(s)$ sarà necessario inserire almeno uno zero a bassa pulsazione in modo da ottenere un anticipo di fase sufficiente a garantire il rispetto del vincolo sul margine di fase. Provando per prime le soluzioni più semplici, iniziamo considerando un regolatore con un solo zero (di fatto un regolatore PI), e consideriamo due diversi posizionamenti dello zero del regolatore:

- (a) zero alla pulsazione dei poli dominanti $w_z = 0.5$ rad/s (cancellando un polo)
- (b) zero una decade prima della pulsazione dei poli dominanti $w_z = 0.05$ rad/s

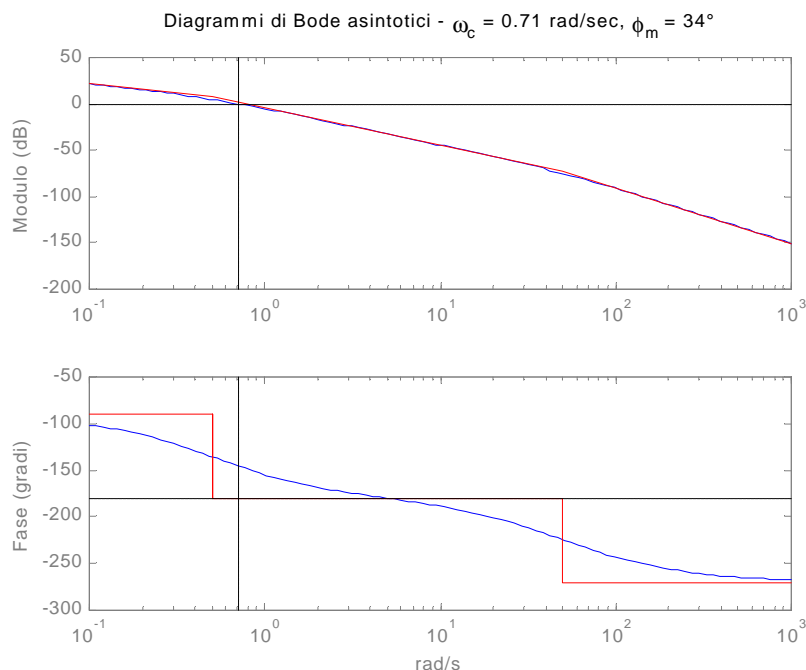
Soluzione (a)

Fissando la pulsazione dello zero $w_z = 0.5$ rad/s e tarando il guadagno (parametro rimasto libero al termine della fase di progetto statico) si ottiene il seguente regolatore

$$R_a(s) = 0.35 \frac{1 + 2s}{s}$$

a cui corrisponde la funzione d'anello

$$L(s) = R_a(s)G(s) = \frac{1.225}{s(1 + 2s)(1 + 0.02s)}$$



Le specifiche sono quindi rispettate ($w_c \cong 0.71$ rad/s, $\phi_m \cong 34^\circ$)

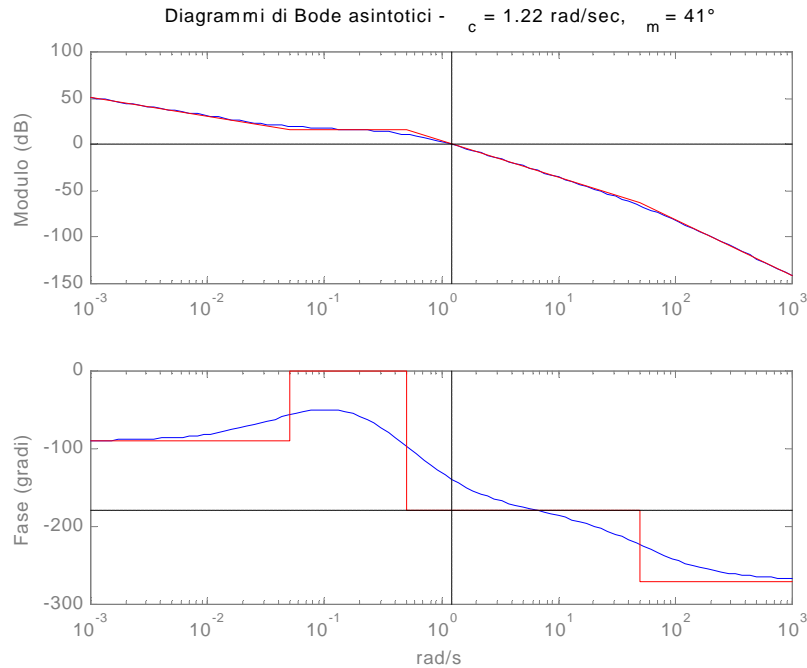
Soluzione (b)

Fissando la pulsazione dello zero $w_z = 0.05$ rad/s e tarando il guadagno (parametro rimasto libero al termine della fase di progetto statico) si ottiene il seguente regolatore

$$R_b(s) = 0.1 \frac{1 + 20s}{s}$$

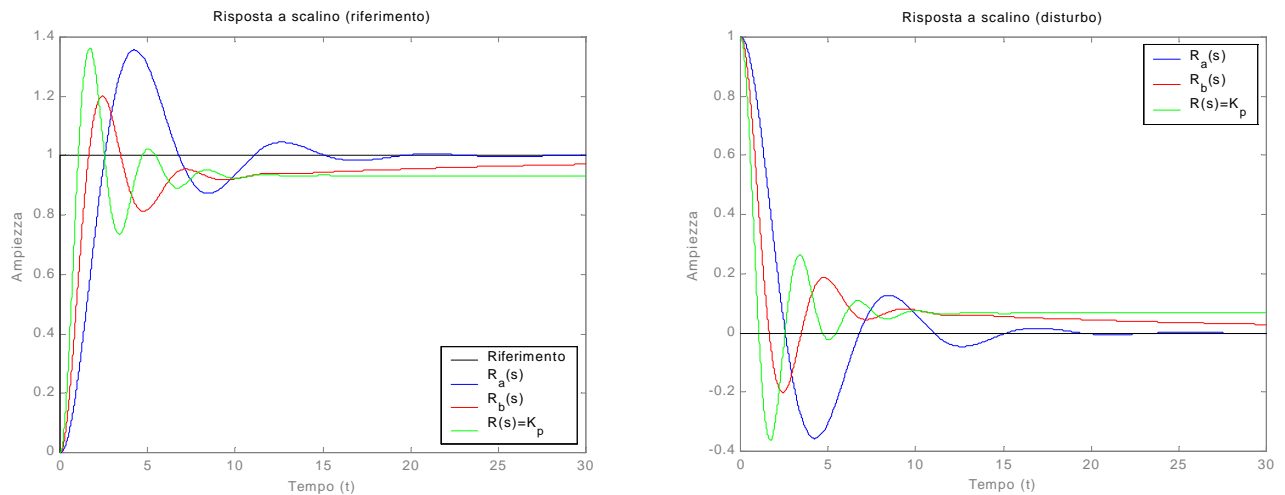
a cui corrisponde la funzione d'anello

$$L(s) = R_b(s)G(s) = \frac{0.35(1 + 20s)}{s(1 + 2s)^2(1 + 0.02s)}$$



Le specifiche sono quindi rispettate ($\omega_c \cong 1.22 \text{ rad/s}$, $\phi_m \cong 41^\circ$)

Commento Confrontiamo ora i due controllori progettati ed il controllore proporzionale proposto nell'esercizio 1 in termini di risposte a scalino sul riferimento e sul disturbo.



Il primo regolatore ha un comportamento tutto sommato ragionevole (anche se si potrebbe tentare di ridurre il tempo di assestamento riducendo leggermente la pulsazione dello zero).

Il secondo regolatore, pur avendo un tempo di assestamento inferiore, presenta un effetto di lenta deriva della risposta, nel senso che il valore dell'uscita va in fretta "vicino" al valore di regime, ma impiega molto tempo per raggiungere il valore asintotico. Questo effetto è provocato da una "quasi cancellazione" polo/zero a bassa frequenza nella funzione $F(s)$. Il controllore risulta anche meno moderato del precedente.

Il regolatore proporzionale ha un tempo di assestamento comparabile con il precedente e non soffre della lenta deriva, ma non permette di ottenere un errore nullo a transitorio esaurito.