

Fondamenti di automatica – Laurea on Line
Prova in itinere PI01 – A.A. 2002/03
Traccia della soluzione

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad A = \begin{bmatrix} ab & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4-a \\ 0 & 1 & b-3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad 1]$$

1.1) Determinare per quali valori dei parametri reali a e b il sistema è asintoticamente stabile.

La stabilità dipende dal segno della parte reale dagli autovalori della matrice A . D'altra parte, il polinomio caratteristico di A è dato da

$$\mathbf{j}(s) = (s - ab)[s(s - b + 3) - 4 + a] = (s - ab)[s^2 + s(3 - b) - 4 + a]$$

Perché la radice associata al primo fattore sia negativa occorre che sia $ab < 0$. Le altre due radici hanno parte reale negativa se e solo se i coefficienti del corrispondente polinomio di secondo grado sono concordi in segno. Quindi deve essere $3 - b > 0$ e $-4 + a > 0$. In definitiva, i valori di a e b per cui il sistema è asintoticamente stabile sono quelli che soddisfano il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} ab < 0 \\ 3 - b > 0 \\ -4 + a > 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} a > 4 \\ b < 0 \end{cases}$$

1.2) Si ponga ora $a = 5$, $b = -1$. Dire se il movimento libero dello stato presenta delle oscillazioni (smorzate, permanenti o divergenti) per qualche scelta dello stato iniziale.

Con questi valori di a e b il polinomio caratteristico diventa

$$\mathbf{j}(s) = (s + 5)(s^2 + 4s + 1)$$

e possiede, oltre alla radice $s_1 = -5$, altre due radici reali $s_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}$. Quindi il movimento libero, che contiene combinazioni di funzioni esponenziali del tipo $e^{s_i t}$, non presenta comportamenti oscillanti.

1.3) Ancora con $a = 5$, $b = -1$ calcolare l'uscita di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso $\bar{u} = 10$.

Si osservi dapprima che l'uscita y coincide con la terza variabile di stato x_3 . Dalla seconda componente dell'equazione di stato risulta che, all'equilibrio, deve essere

$$0 = (4 - a)\bar{x}_3 + \bar{u} = -\bar{x}_3 + \bar{u} \quad \text{ovvero} \quad \bar{x}_3 = \bar{u}$$

Perciò l'uscita di equilibrio in corrispondenza di $\bar{u} = 10$ vale $\bar{y} = \bar{x}_3 = \bar{u} = 10$. In altre parole, il guadagno statico del sistema è pari a 1.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema descritto dallo schema a blocchi di Fig. 1, dove i due sottosistemi Σ_1 e Σ_2 sono così definiti:

$$\Sigma_1: \dot{w}(t) = -8w(t) + 5u(t)$$

$$\Sigma_2: \frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{20}{s^2 + 1.2s + 4}$$

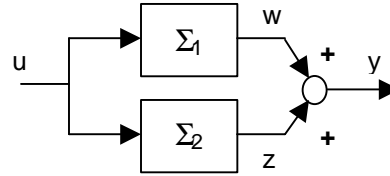


Fig. 1

2.1) Determinare i valori di equilibrio delle variabili w , z e y quando l'ingresso u è costante.

Supponendo di applicare l'ingresso costante \bar{u} il valore di equilibrio per w è quello che risolve l'equazione

$$0 = -8\bar{w} + 5\bar{u} \quad \text{ovvero} \quad \bar{w} = 5\bar{u} / 8 = 0.625\bar{u}$$

Per quanto riguarda z , all'equilibrio risulta

$$\bar{z} = \mathbf{m}_2 \bar{u} = 5\bar{u}$$

dove $\mathbf{m}_2 = G_2(0)$ è il guadagno della funzione di trasferimento $G_2(s)$ tra u e z .

Infine, dallo schema, $\bar{y} = \bar{w} + \bar{z} = 45\bar{u} / 8 = 5.625\bar{u}$.

2.2) Calcolare la funzione di trasferimento complessiva tra u e y .

La funzione di trasferimento $G_1(s)$ tra u e w vale

$$G_1(s) = \frac{5}{s+8}$$

Essendo i due sistemi in parallelo, la funzione di trasferimento complessiva è

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{5}{s+8} + \frac{20}{s^2 + 1.2s + 4} = \frac{5s^2 + 26s + 180}{(s+8)(s^2 + 1.2s + 4)} = \frac{5(s^2 + 5.2s + 36)}{(s+8)(s^2 + 1.2s + 4)}$$

2.3) Valutare, anche approssimativamente, le principali caratteristiche del movimento di $y(t)$ in risposta ad uno scalino unitario di $u(t)$.

Si nota innanzitutto che il sistema è asintoticamente stabile perché tutti i poli hanno parte reale negativa. Più precisamente, il sistema ha un polo reale in $s = -8$ e due poli complessi coniugati con pulsazione naturale $\mathbf{w}_n = 2$ e smorzamento $\mathbf{x} = 0.3$.

Inoltre ci sono due zeri complessi coniugati con pulsazione naturale $\mathbf{w}_{zn} = 6$ e smorzamento $\mathbf{x}_z = 5.2/12 \cong 0.43$.

Si può allora affermare che i poli dominanti sono quelli complessi e che la presenza degli zeri può essere in prima approssimazione trascurata, dato che la loro pulsazione naturale è 3 volte quella dei poli.

Infine il guadagno è $\mathbf{m} = G(0) = 180/32 = 5.625$ (coerentemente con quanto ricavato al punto 2.1).

La risposta allo scalino del sistema presenterà quindi delle oscillazioni smorzate (con smorzamento circa 0.3) e tenderà asintoticamente al valore 5.625 del guadagno.

Si possono poi valutare altri parametri caratteristici basati sull'approssimazione a poli dominanti:

tempo di assestamento: $t_a \cong 5/\mathbf{x}\mathbf{w}_n \cong 8.33$

massima sovraelongazione relativa: $\Delta = \exp\left(-\mathbf{x}\mathbf{p} / \sqrt{1-\mathbf{x}^2}\right) \cong 0.37$

periodo delle oscillazioni: $T = 2\mathbf{p} / \mathbf{w}_n \sqrt{1-\mathbf{x}^2} \cong 3.29$

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema con ingresso u e uscita y descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2.1s + 0.2}, \quad k > 0$$

3.1) Determinare il valore del parametro k in modo che l'ampiezza dell'uscita sinusoidale di regime in risposta all'ingresso $u(t) = \sin(t)$ sia uguale a 10.

Per il teorema della risposta in frequenza l'ampiezza Y della sinusoide in uscita a transitorio esaurito vale

$$Y = |G(j1)| = \frac{|k|}{|-1 + j2.1 + 0.2|} = \frac{k}{|-0.8 + j2.1|} = \frac{k}{\sqrt{5.05}}$$

Per avere $Y = 10$ deve essere allora $k = 10\sqrt{5.05} \cong 22.47$.

3.2) Ponendo ora $k = 1000$, tracciare l'andamento qualitativo dei diagrammi di Bode del modulo e della fase associati a $G(s)$.

Il sistema ha guadagno $m = 1000/0.2 = 5000 \cong 74dB$. I poli valgono -0.1 e -2 . Il diagramma asintotico del modulo ha allora un tratto iniziale orizzontale con ordinata $74dB$ e presenta due cambi di pendenza unitari ($-20dB/decade$) in corrispondenza delle pulsazioni 0.1 e 2 .

Il diagramma asintotico della fase parte dal valore 0° e diminuisce di 90° in corrispondenza di ciascuna delle due pulsazioni $\omega = 0.1$ e $\omega = 2$.

Essendo i poli reali, lo scostamento del diagramma effettivo da quello asintotico è modesto per quel che riguarda il modulo, mentre è consistente per quanto riguarda la fase.

Nella Fig. 2 della pagina successiva sono riportati i diagrammi effettivi.

3.3) Sempre con $k = 1000$, valutare l'andamento asintotico dell'uscita quando l'ingresso vale $u(t) = -2 + 3\sin(10t)$.

Grazie al principio di sovrapposizione degli effetti si può affermare che l'uscita asintotica sarà costituita da una costante pari a -2 per il guadagno $m = 5000$ e da una sinusoide con ampiezza e fase determinate mediante il teorema della risposta in frequenza. Quindi l'uscita asintotica vale

$$y_\infty(t) = -10000 + 3|G(j10)|\sin(10t + \arg G(j10))$$

Dai diagrammi di Bode, oppure dal calcolo analitico, risulta $|G(j10)| \cong 20dB = 10$ e $\arg G(j10) \cong -170^\circ \cong -3 \text{ rad}$. Pertanto

$$y_\infty(t) \cong -10000 + 30\sin(10t - 3)$$

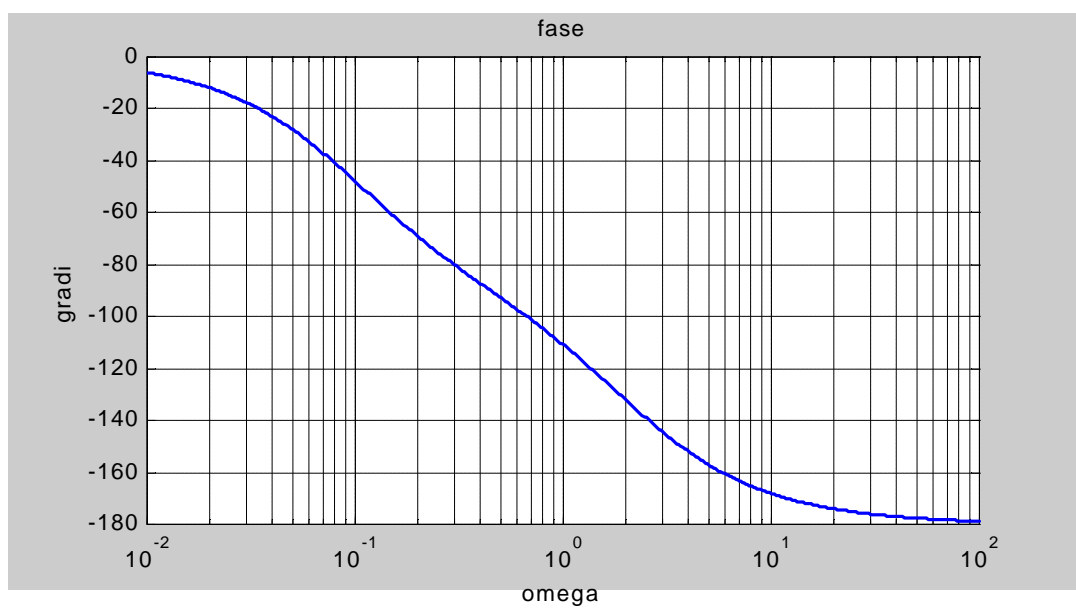
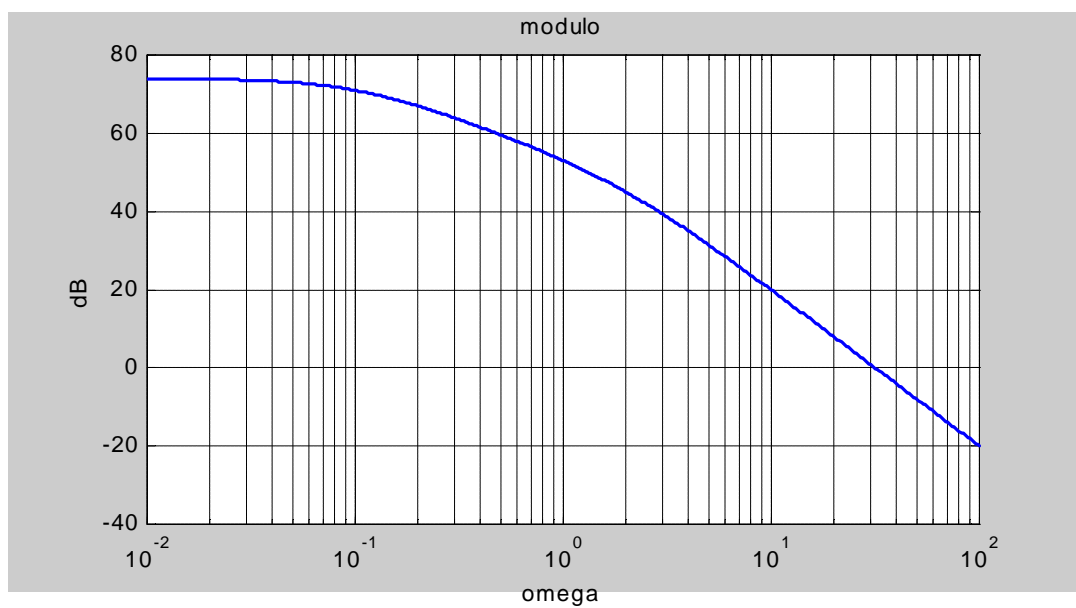


Fig. 2