

**Fondamenti di automatica – Laurea on Line**  
**Prova in itinere PI03 – A.A. 2002/03**  
**Traccia della soluzione**

**ESERCIZIO 1**

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\mathbf{S}: \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} -1.5 & 2 \\ -3 & 3.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [-1 \quad 0.5]$$

**1.1) Determinare lo stato e l'uscita di equilibrio corrispondenti all'ingresso  $\bar{u} = 2$** 

Per un sistema a tempo discreto soggetto ad un ingresso costante  $u(k) = \bar{u}$ , gli stati di equilibrio devono soddisfare l'equazione  $x(k+1) = x(k)$ , cioè sono le soluzioni  $\bar{x}$  costanti del sistema  $\bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u}$

$$\bar{x} = (I - A)^{-1} B \bar{u} = \begin{bmatrix} 2.5 & -2 \\ 3 & -2.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \bar{u} = \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ 12 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \bar{u} = \begin{bmatrix} -6 \\ -8 \end{bmatrix} 2 = \begin{bmatrix} -12 \\ -16 \end{bmatrix}$$

a cui corrisponde l'uscita di equilibrio

$$\bar{y} = C\bar{x} = [-1 \quad 0.5] \begin{bmatrix} -12 \\ -16 \end{bmatrix} = 4$$

**1.2) Studiare la stabilità del sistema  $\mathbf{S}$** 

Le proprietà di stabilità per un sistema a tempo discreto dipendono dal modulo degli autovalori della matrice  $A$ . Il polinomio caratteristico di  $A$  è dato da

$$\mathbf{j}(z) = \det(zI - A) = \det \begin{bmatrix} z + 1.5 & -2 \\ 3 & z - 3.5 \end{bmatrix} = z^2 - 2z + 0.75$$

per cui i corrispondenti autovalori risultano

$$\begin{cases} z_1 = 0.5 \\ z_2 = 1.5 \end{cases}$$

Poiché  $|z_2| > 1$  il sistema  $\mathbf{S}$  risulta instabile

**1.3) Calcolare la funzione di trasferimento tra  $u(k)$  e  $y(k)$** 

Per il calcolo della funzione di trasferimento applichiamo la definizione

$$\begin{aligned} G(z) &= C(zI - A)^{-1}B = [-1 \quad 0.5] \begin{bmatrix} z + 1.5 & -2 \\ 3 & z - 3.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{z^2 - 2z + 0.75} [-1 \quad 0.5] \begin{bmatrix} z - 3.5 & 2 \\ -3 & z + 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{-0.5}{z^2 - 2z + 0.75} \end{aligned}$$

Fattorizzando il denominatore in modo da evidenziare i due poli, si ottiene

$$G(z) = \frac{-0.5}{(z - 0.5)(z - 1.5)}$$

Detta  $G(z)$  la funzione di trasferimento del sistema  $S$ , si consideri il sistema di Fig.1, con

$$R(z) = -1.68 \frac{z - 0.5}{z + 0.5}$$

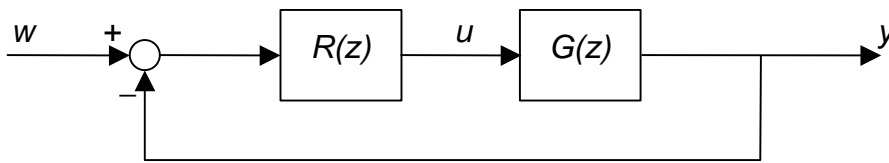


Fig. 1

#### 1.4) Studiare la stabilità del sistema retroazionato

Per prima cosa si calcoli la funzione d'anello del sistema

$$L(z) = R(z)G(z) = -1.68 \frac{z - 0.5}{z + 0.5} \frac{-0.5}{(z - 0.5)(z - 1.5)} = \frac{0.84}{(z + 0.5)(z - 1.5)} = \frac{0.84}{z^2 - z - 0.75}$$

Nel prodotto  $R(z)G(z)$  avviene una cancellazione tra singolarità che crea una parte non raggiungibile. Dato che il modulo del polo cancellato è minore di 1 la cancellazione è lecita, e l'asintotica stabilità dei poli in anello chiuso è condizione necessaria e sufficiente per garantire l'asintotica stabilità del sistema retroazionato.

I poli del sistema in anello chiuso sono le radici dell'equazione

$$D_L(z) + N_L(z) = z^2 - z - 0.75 + 0.84 = z^2 - z + 0.09 = 0$$

$$\begin{cases} z_1 = 0.1 \\ z_2 = 0.9 \end{cases}$$

Entrambi i poli hanno modulo minore di 1, dunque il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

#### 1.5) Calcolare la funzione di trasferimento tra $w(k)$ e $y(k)$

La funzione di trasferimento risulta

$$F(z) = \frac{L(z)}{1 + L(z)} = \frac{0.84}{z^2 - z + 0.09}$$

#### 1.6) Valutare approssimativamente i seguenti parametri della risposta a scalino del sistema retroazionato (con l'ipotesi di stato iniziale nullo):

(a) valore iniziale

Applicando il teorema del valore iniziale si ottiene

$$y(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \frac{z}{z - 1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{0.84z}{(z^2 - z + 0.09)(z - 1)} = 0$$

(b) valore di regime

Il valore di regime si può trovare applicando il teorema del valore finale

$$y(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) F(z) \frac{z}{z - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.84z}{z^2 - z + 0.09} = 9.333$$

oppure ricordando la definizione di guadagno, come rapporto tra il valore dell'uscita e dell'ingresso di regime (unitario)

$$y(\infty) = F(1) = 9.333$$

(c) ritardo iniziale nella risposta

Il ritardo iniziale nella risposta a scalino di un sistema coincide con il grado relativo della funzione di trasferimento (cioè la differenza tra i gradi del denominatore e del numeratore), in questo caso 2. Dunque il primo campione non nullo della risposta a scalino sarà proprio  $y(2)$ .

## (d) tempo di assestamento

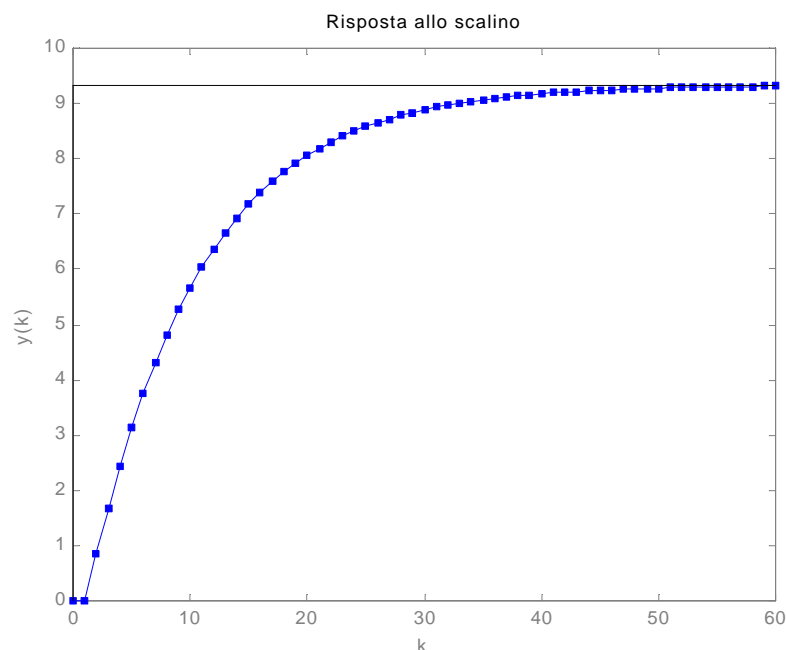
In prima approssimazione si può supporre che il tempo di assestamento dipenda dal solo polo dominante (polo più vicino al cerchio di raggio unitario), cioè quello associato alla dinamica più lenta, ovvero  $z_2 = 0.9$ . Il transitorio può quindi ritenersi esaurito dopo un numero di campioni pari a circa

$$t_a \cong -\frac{5}{\ln|z_2|} = 48$$

Tenendo conto del ritardo iniziale pari a 2 campioni, si può supporre che la risposta a scalino vada praticamente a regime dopo un tempo pari a 50 campioni.

## (e) presenza di oscillazioni

La risposta a scalino non presenta oscillazioni in quanto il sistema possiede una coppia di poli reali positivi. Per avere oscillazioni è necessario che il sistema (a tempo discreto) possieda una coppia di poli complessi coniugati oppure poli reali negativi.

**ESERCIZIO 2**

Si supponga di aver progettato un regolatore analogico descritto dalla funzione di trasferimento

$$R(s) = \frac{0.3(1 + 5s)}{s(1 + 0.1s)}$$

per controllare un sistema affetto da vari tipi di disturbi. I disturbi sulla linea di andata hanno uno spettro confinato nella banda  $[0, 0.2]$  rad/s, mentre sul trasduttore agiscono disturbi con spettro confinato nella banda  $[0.9, 1.8]$  rad/s.

Si voglia ora determinare una versione digitale di tale regolatore.

**2.1) Selezionare un valore adeguato del periodo di campionamento  $T$** 

Si consideri lo schema di controllo in retroazione di Fig. 2.

La funzione di trasferimento tra il disturbo sulla linea di andata  $d(t)$  e l'uscita  $y(t)$  è pari alla funzione di sensitività  $S(s)$ , assimilabile in prima approssimazione ad un filtro passa-alto di banda  $[w_c, \infty]$ .

Al contrario la funzione di trasferimento tra il disturbo sulla linea di retroazione  $n(t)$  e l'uscita  $y(t)$  è pari alla funzione di sensitività complementare cambiata di segno  $-F(s)$ , assimilabile in prima approssimazione ad un filtro passa-basso di banda  $[0, w_c]$ .

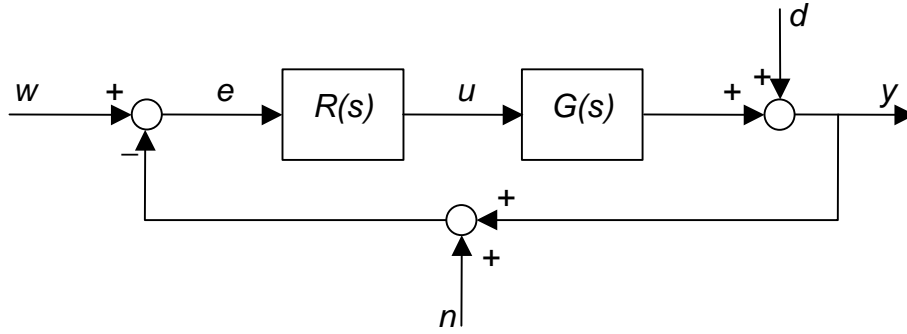


Fig. 2

Perché il regolatore sia in grado di attenuare il disturbo sulla linea di andata è necessario che la pulsazione critica sia superiore a 0.2 rad/s, mentre per attenuare il disturbo sulla linea di retroazione la pulsazione critica deve essere inferiore a 0.9 rad/s. Per questo si può supporre che il progetto del regolatore sia stato realizzato in modo da portare ad una pulsazione critica  $w_c$  compresa nell'intervallo [0.2, 0.9] rad/s.

Una regola empirica suggerisce la scelta di una pulsazione di campionamento  $w_s$  nell'intervallo

$$5w_c \leq w_s \leq 50w_c$$

a cui corrisponde un periodo di campionamento  $T$

$$\frac{2p}{50w_c} \leq T \leq \frac{2p}{5w_c}$$

che nel caso “peggiore”, cioè quello in cui la pulsazione critica è pari a 0.9 rad/s, corrisponde approssimativamente a  $0.14 \text{ s} \leq T \leq 1.4 \text{ s}$ .

Possiamo scegliere ad esempio  $T = 1 \text{ s}$ .

## 2.2) Ricavare la funzione di trasferimento del regolatore digitale mediante il metodo di Tustin

La versione digitale del regolatore con il metodo di Tustin si ottiene operando la sostituzione

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

$$R^*(z) = \frac{0.3 \left( 1 + 5 \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \right)}{\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \left( 1 + 0.1 \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \right)} = \frac{0.15 T (z+1)((T+10)z + T-10)}{(z-1)((T+0.2)z + T-0.2)}$$

Con un periodo di campionamento  $T = 1 \text{ s}$ , la funzione di trasferimento del regolatore diventa

$$R^*(z) = \frac{1.375 (z+1)(z-0.818)}{(z-1)(z+0.6667)} = \frac{1.375z^2 + 0.250z - 1.125}{z^2 - 0.3333z - 0.6667}$$

## 2.3) Scrivere la legge di controllo del regolatore digitale nella forma ARMA (cioè sotto forma di un'equazione alle differenze)

La legge di controllo del regolatore digitale nella forma ARMA si ricava moltiplicando numeratore e denominatore della funzione di trasferimento per  $z^{-2}$

$$R^*(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{1.375 + 0.250z^{-1} - 1.125z^{-2}}{1 - 0.3333z^{-1} - 0.6667z^{-2}}$$

$$(1 - 0.3333z^{-1} - 0.6667z^{-2})U(z) = (1.375 + 0.250z^{-1} - 1.125z^{-2})E(z)$$

$$U(z) = 0.3333z^{-1}U(z) + 0.6667z^{-2}U(z) + 1.375E(z) + 0.250z^{-1}E(z) - 1.125z^{-2}E(z)$$

Ricordando che l'operatore  $z^{-1}$  rappresenta l'operatore di ritardo unitario nel dominio del

tempo, si ottiene, antitrasformando

$$u(k) = 0.3333u(k-1) + 0.6667u(k-2) + 1.375e(k) + 0.250e(k-1) - 1.125e(k-2)$$

**2.4)** Commentare brevemente i problemi che nascerebbero se si utilizzasse un periodo di campionamento di valore molto più elevato rispetto a quello scelto in precedenza

Utilizzando periodi di campionamento superiori a quelli suggeriti dalla regola empirica del punto 2.1, si corre il rischio di provocare il fenomeno di “aliasing” nell’operazione di campionamento, con conseguenze imprevedibili sul comportamento del sistema di controllo. D’altra parte, se si ponesse a monte del campionatore un filtro anti-aliasing, questo avrebbe una banda passante più stretta (o almeno comparabile) rispetto alla banda del sistema di controllo che si vuole realizzare e contribuirebbe in modo significativo alla perdita di fase in vicinanza della pulsazione critica, con un inevitabile degrado delle prestazioni rispetto alla soluzione analogica.