

Fondamenti di automatica – Laurea on Line

Prova in itinere PI01 – traccia della soluzione

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t)x_2(t) + 2\sqrt{u(t)}$$

$$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + x_1(t)u^2(t)$$

$$y(t) = x_1^3(t)$$

1.1) Calcolare tutti gli stati e le uscite di equilibrio corrispondenti al valore dell'ingresso $\bar{u} = 1$.

All'equilibrio la derivata di x rispetto al tempo è nulla e sia le variabili di stato che l'uscita sono costanti per definizione. Per calcolare i loro valori quando l'ingresso è costante e uguale a 1 dobbiamo quindi imporre

$$\begin{cases} 0 = -\bar{x}_1\bar{x}_2 + 2 \\ 0 = -2\bar{x}_2 + \bar{x}_1 \\ \bar{y} = \bar{x}_1^3 \end{cases}$$

Il sistema è risolto per i seguenti valori:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = 2 \\ \bar{x}_2 = 1 \\ \bar{y} = 8 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = -2 \\ \bar{x}_2 = -1 \\ \bar{y} = -8 \end{cases}$$

1.2) Si faccia ora riferimento allo stato di equilibrio nel quale entrambe le variabili di stato sono positive. Scrivere le equazioni del sistema linearizzato intorno a tale equilibrio.

Definendo le variazioni

$$dx_1(t) = x_1(t) - \bar{x}_1$$

$$dx_2(t) = x_2(t) - \bar{x}_2$$

$$du(t) = u(t) - \bar{u}$$

$$dy(t) = y(t) - \bar{y}$$

il sistema linearizzato è dato da

$$\begin{cases} d\dot{x}_1(t) = \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x_1} dx_1(t) + \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x_2} dx_2(t) + \frac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{u})}{\partial u} du(t) \\ d\dot{x}_2(t) = \frac{\partial f_2(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x_1} dx_1(t) + \frac{\partial f_2(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x_2} dx_2(t) + \frac{\partial f_2(\bar{x}, \bar{u})}{\partial u} du(t) \\ dy(t) = \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x_1} dx_1(t) + \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{u})}{\partial x_2} dx_2(t) + \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{u})}{\partial u} du(t) \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} d\dot{x}_1(t) = -\bar{x}_2 dx_1(t) - \bar{x}_1 dx_2(t) + \frac{1}{\sqrt{\bar{u}}} du(t) \\ d\dot{x}_2(t) = \bar{u}^2 dx_1(t) - 2 dx_2(t) + 2\bar{x}_1 \bar{u} du(t) \\ dy(t) = 3\bar{x}_1^2 dx_1(t) \end{cases}$$

e per l'equilibrio considerato

$$\begin{cases} d\dot{x}_1(t) = -dx_1(t) - 2dx_2(t) + du(t) \\ d\dot{x}_2(t) = dx_1(t) - 2dx_2(t) + 4du(t) \\ dy(t) = 12dx_1(t) \end{cases}$$

1.3) Ancora con riferimento allo stesso stato di equilibrio, giudicare la sua proprietà di stabilità

Si calcoli il polinomio caratteristico del sistema linearizzato, $j(s) = \det(sI - A)$

$$\text{dove } A = \begin{bmatrix} -\bar{x}_2 & -\bar{x}_1 \\ \bar{u}^2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$j(s) = \det \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} = s^2 + 3s + 4$$

Notiamo che i 3 coefficienti non sono nulli e hanno segno concorde. Pertanto entrambe le radici hanno parte reale negativa. Si può dunque concludere che lo stato di equilibrio considerato è asintoticamente stabile.

ESERCIZIO 2

Si discuta per quali valori del parametro reale k il sistema lineare descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & k \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ k \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad D = 3$$

risulta asintoticamente stabile.

Calcoliamo il polinomio caratteristico $\mathbf{j}(s) = \det(sI - A)$

$$\mathbf{j}(s) = \det \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s-k \end{bmatrix} = s^2 + (2-k)s - 2k + 1$$

Analizzando i coefficienti, notiamo che il segno del primo è positivo, mentre quelli del secondo e del terzo dipendono da k . Trattandosi di un polinomio di secondo grado, le radici hanno parte reale negativa, ovvero il sistema è asintoticamente stabile, se e solo se valgono le disequazioni

$$\begin{cases} 2-k > 0 \\ -2k+1 > 0 \end{cases}$$

che hanno come soluzione $k < 1/2$.

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema dinamico di ordine $n = 1$ descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = 4x(t) + 5u(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

3.1) Scrivere l'espressione del movimento dello stato a partire dallo stato iniziale $x(0) = -1$ in risposta all'ingresso

$$u(t) = sca(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Il movimento dello stato, ricavato con la formula di Lagrange, è

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

dove le matrici A e B in questo caso sono scalari e valgono rispettivamente $A = 4$ e $B = 5$, $u(t) = 1$ dall'istante 0 in poi, e $x_0 = -1$. Risulta allora

$$x(t) = -e^{4t} + \int_0^t e^{4(t-\tau)} 5 d\tau = -e^{4t} + 5e^{4t} \int_0^t e^{-4\tau} d\tau = -e^{4t} - \frac{5}{4} e^{4t} [e^{-4\tau}]_0^t = -e^{4t} - \frac{5}{4} e^{4t} (e^{-4t} - 1)$$

$$x(t) = \frac{1}{4} (e^{4t} - 5)$$

3.2) Nelle stesse condizioni di prima, calcolare qual è il valore dell'uscita all'istante $t = 1$.

Considerando che $y(t) = x(t)$, si ottiene dalla formula precedente

$$y(1) = x(1) = \frac{1}{4} (e^4 - 5) \cong 12.4$$

ESERCIZIO 4

Si indichi la risposta corretta ai seguenti quesiti:

4.1) Un sistema di controllo in anello chiuso è caratterizzato dal fatto che l'azione di controllo

- [a] dipende solo dalla variabile che esprime l'andamento desiderato dell'uscita
- [b] dipende dalla misura di un disturbo agente sul sistema
- ☒ [c] dipende anche da una variabile influenzata dalla variabile di controllo
- [d] non dipende dalla variabile che esprime l'andamento desiderato dell'uscita

4.2) Il vettore di stato di un sistema dinamico a tempo continuo

- [a] ha sempre la dimensione del vettore di ingresso
- [b] ha sempre la dimensione del vettore di uscita
- ☒ [c] può avere dimensione maggiore di 1
- [d] ha sempre dimensione 1

4.3) Se il polinomio caratteristico di un sistema lineare è dato da

$$j(s) = s^3 - 2s^2 + 7s + 5$$

allora

- [a] il sistema è sicuramente asintoticamente stabile
- [b] il sistema può essere asintoticamente stabile
- [c] il sistema è sia stabile che instabile
- ☒ [d] il sistema non può essere asintoticamente stabile

4.4) Le radici del polinomio

$$j(s) = s^3 + 4s^2 + ks + 5$$

hanno tutte parte reale negativa se e solo se

- [a] $k > -5$
- [b] $k > 0$
- ☒ [c] $k > 5/4$
- [d] $k > 4/5$

ESERCIZIO 5

Con riferimento al sistema lineare invariante a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

si indichi la risposta corretta ai seguenti quesiti:

5.1) Il sistema si dice strettamente proprio quando

[a] la matrice A è nulla

[b] la matrice B è nulla

[c] la matrice C è nulla

☒ [d] la matrice D è nulla

5.2) Fissato un valore costante dell'ingresso \bar{u} , lo stato di equilibrio esiste ed è unico se e solo se

☒ [a] la matrice A è non singolare

[b] tutti gli autovalori della matrice A hanno parte reale negativa

[c] tutti gli autovalori della matrice A sono reali

[d] la matrice A è uno scalare

5.3) Se, a parità di ingresso $u(t) \neq 0$, lo stato iniziale viene moltiplicato per 2, allora

[a] il movimento dell'uscita aumenta di 2

[b] il movimento dell'uscita raddoppia

☒ [c] la componente libera del movimento dell'uscita raddoppia

[d] la componente forzata del movimento dell'uscita raddoppia

5.4) La stabilità asintotica del sistema è assicurata se

[a] la matrice A è diagonale

[b] la matrice A è diagonalizzabile

[c] gli elementi sulla diagonale della matrice A sono negativi

☒ [d] nessuna delle precedenti