

Fondamenti di automatica – Laurea on Line

Prova in itinere PI03 – traccia della soluzione

Si consideri il sistema di controllo in anello chiuso di Fig. 1, dove il sistema da controllare è descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{2}{(1+10s)(1+0.1s)}$$

e la funzione di trasferimento $R(s)$ del regolatore può assumere una delle tre seguenti espressioni:

$$R(s) = \begin{cases} R_1(s) = 5 \\ R_2(s) = 5e^{-0.5s} \\ R_3(s) = \frac{3(1+10s)}{s} \end{cases}$$

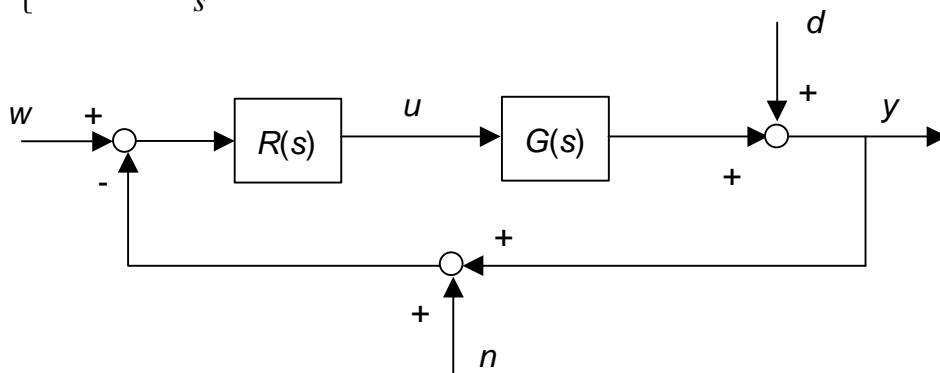


Fig. 1

1) Verificare che tutti e tre i regolatori garantiscono l'asintotica stabilità del sistema di controllo.

Per la verifica della stabilità si può fare ricorso al criterio di Bode, che risulta applicabile in tutti e tre i casi. In Fig. 2 sono riportati i diagrammi di Bode del modulo associati alle tre funzioni d'anello

$$L_i(s) = R_i(s)G(s) = \begin{cases} \frac{10}{(1+10s)(1+0.1s)} & i = 1 \\ \frac{10e^{-0.5s}}{(1+10s)(1+0.1s)} & i = 2 \\ \frac{6}{s(1+0.1s)} & i = 3 \end{cases}$$

Si noti che i diagrammi di L_1 e L_2 sono coincidenti, poiché il ritardo non influisce sul modulo.

Da tali diagrammi si ricava

$$w_{c1} = w_{c2} \cong 1$$

$$w_{c3} \cong 5$$

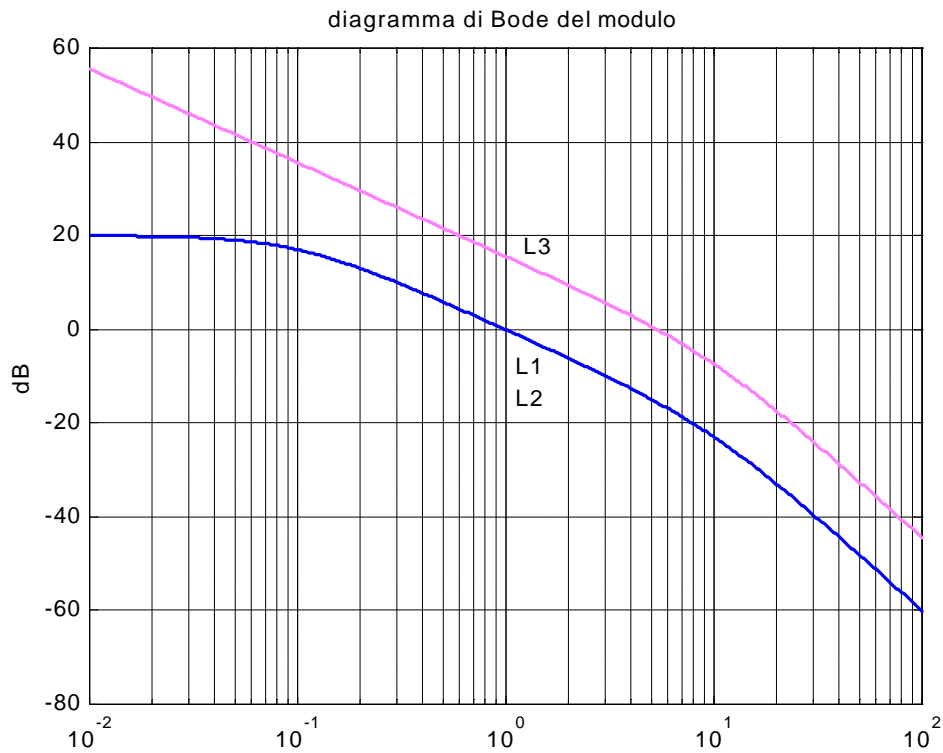


Fig. 2

I corrispondenti valori della fase critica sono

$$j_{c1} \cong -\arctan(10) - \arctan(0.1) = -90^\circ$$

$$j_{c2} \cong -\arctan(10) - \arctan(0.1) - 0.5 \frac{180^\circ}{p} \cong -119^\circ$$

$$j_{c3} \cong -90^\circ - \arctan(0.5) \cong -117^\circ$$

e i valori per il margine di fase sono, rispettivamente,

$$j_{m1} \cong 90^\circ$$

$$j_{m2} \cong 61^\circ$$

$$j_{m3} \cong 63^\circ$$

Essendo positivi in tutti e tre i casi il guadagno d'anello e il margine di fase, si conclude che i tre sistemi di controllo sono asintoticamente stabili.

2) Confrontare i tre sistemi di controllo in termini di valori della pulsazione critica ω_c e del margine di fase j_m .

Per i calcoli si veda il punto precedente.

Dunque, il regolatore R_3 è quello che garantisce il massimo valore di ω_c , mentre il regolatore R_1 è quello che garantisce il massimo valore di j_m .

3) Dire quale (o quali) dei tre regolatori garantisce un margine di guadagno infinitamente elevato. Spiegare poi perché tale proprietà risulta importante in pratica.

E' immediato verificare che il diagramma della fase associato a L_1 e a L_3 non scende mai al di sotto del valore di -180° , al contrario di quello associato a L_2 che, a causa del ritardo, scende verso $-\infty$.

Quindi sia il regolatore R_1 che il regolatore R_3 assicurano un valore infinito del margine di guadagno. Ciò significa che il sistema di controllo rimane asintoticamente stabile anche a fronte di variazioni arbitrariamente ampie del guadagno d'anello. Tale proprietà è importante in termini di robustezza della stabilità.

4) Confrontare i tre sistemi di controllo in termini di precisione statica in presenza di un riferimento w a scalino (supponendo nulli i disturbi d e n).

Nel caso dei regolatori R_1 e R_2 , il tipo della funzione d'anello è $g = 0$. Pertanto l'errore a transitorio esaurito in risposta ad un riferimento a scalino vale $e_1(\infty) = e_2(\infty) = 1/(1 + m) = 1/11$, avendo indicato con m il guadagno d'anello.

Se invece si adotta il regolatore R_3 l'errore a transitorio esaurito risulta nullo, grazie alla presenza nella funzione d'anello di un polo nell'origine.

5) Confrontare i tre sistemi di controllo in termini di tempo di assestamento in risposta a variazioni a scalino del riferimento w e dei disturbi d e n .

Il tempo di assestamento dipende essenzialmente dai poli dominanti in anello chiuso. Usando le consuete approssimazioni possiamo affermare che:

- nel caso del regolatore R_1 , dato che il margine di fase è elevato, il polo dominante è reale con costante di tempo circa uguale a $1/\mathbf{w}_{c1} \cong 1$. Pertanto il tempo di assestamento è circa uguale a $t_{a1} = 5$.
- nel caso del regolatore R_2 il sistema in anello chiuso possiede due poli dominanti complessi con pulsazione naturale $\mathbf{w}_n \cong \mathbf{w}_{c2} \cong 1$ e smorzamento $\mathbf{x} \cong \mathbf{j}_{m2}/100 \cong 0.6$. Quindi il tempo di assestamento può essere valutato come $t_{a2} \cong 5/(\mathbf{x}\mathbf{w}_n) \cong 8.3$. Quando si considerano funzioni di trasferimento in anello chiuso nelle quali il fattore $R(s)$ compare al numeratore (ad esempio se si valuta l'effetto del riferimento w sull'uscita y) si osserverà nella risposta un "tempo morto" aggiuntivo di 0.5 unità di tempo, per cui $t_{a2} \cong 8.3 + 0.5 = 8.8$.
- nel caso del regolatore R_3 il sistema in anello chiuso possiede due poli dominanti complessi con pulsazione naturale $\mathbf{w}_n \cong \mathbf{w}_{c3} \cong 5$ e smorzamento $\mathbf{x} \cong \mathbf{j}_{m3}/100 \cong 0.6$. Quindi il tempo di assestamento può essere valutato come $t_{a3} \cong 5/(\mathbf{x}\mathbf{w}_n) \cong 1.7$.

6) Supponendo ora che sia $w(t) = 0$, $d(t) = n(t) = \sin(0.1t + \mathbf{y})$, discutere quale dei tre sistemi di controllo garantisce una migliore attenuazione dei disturbi.

Si osservi innanzitutto che la pulsazione $\mathbf{w} = 0.1$ dei disturbi cade all'interno della banda di tutti e tre i sistemi di controllo, visto che è in ogni caso inferiore alla pulsazione critica.

Se si indica con $S_i(s) = 1/(1 + L_i(s))$ la funzione di sensitività associata all' i -esimo sistema di controllo, il disturbo d subisce un'attenuazione proporzionale a $|S_i(j0.1)| \cong 1/|L_i(j0.1)|$. Dai diagrammi di Bode della Fig. 2 si ricava

$$|S_1(j0.1)| \cong -17dB, \quad |S_2(j0.1)| \cong -17dB, \quad |S_3(j0.1)| \cong -35dB$$

e il regolatore R_3 si dimostra quindi più efficace nell'attenuare il disturbo d .

Per quanto riguarda il disturbo in retroazione n , la funzione di trasferimento da considerare è la funzione di sensitività complementare $F_i(s) = L_i(s)/(1 + L_i(s))$, che in corrispondenza di $\mathbf{w} = 0.1$ ha modulo circa unitario in tutti e tre i casi, ovvero

$$|F_1(j0.1)| \cong 0dB, \quad |F_2(j0.1)| \cong 0dB, \quad |F_3(j0.1)| \cong 0dB$$

Nessuno dei tre regolatori è quindi in grado di attenuare il disturbo n , che è a frequenza troppo bassa.