

Fondamenti di automatica – Laurea on Line

Prova in itinere PI02 – traccia della soluzione

ESERCIZIO 1

Il comportamento del circuito elettrico della Fig. 1 è descritto, come si può facilmente verificare, dalle seguenti relazioni:

$$C\dot{x}_1(t) = u(t) - x_2(t)$$

$$L\dot{x}_2(t) = x_1(t) - Rx_2(t)$$

$$y(t) = Rx_2(t)$$

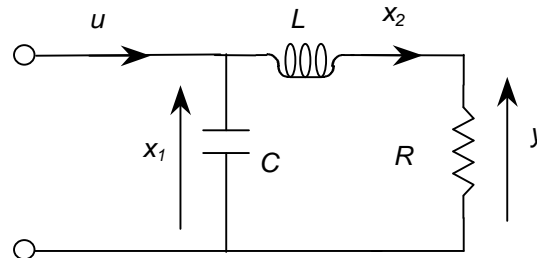


Fig. 1

1.1) Calcolare la funzione di trasferimento tra la corrente u e la tensione y .

Il sistema ammette la seguente rappresentazione di stato:

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{C}x_2(t) + \frac{1}{C}u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{L}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t)$$

$$y(t) = Rx_2(t)$$

o, equivalentemente

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

dove

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad R]$$

La funzione di trasferimento sarà allora:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{R}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{R/LC}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

1.2) Si supponga ora di alimentare il circuito, partendo da correnti e tensioni nulle all'istante iniziale, con una corrente che varia a scalino. Dire per quali valori dei parametri R , L , C la tensione y presenta durante il transitorio un andamento oscillante.

Affinché il sistema presenti una risposta allo scalino con andamento oscillante dovrà essere presente in $G(s)$ una coppia di poli complessi e coniugati.

Il polinomio di secondo grado $LCs^2 + RCs + 1$ ha due radici complesse e coniugate se e solo se il suo discriminante è negativo, cioè se vale la seguente relazione sui parametri:

$$\Delta = (RC)^2 - 4LC < 0$$

ovvero $R^2C < 4L$.

1.3) In questa e nelle domande successive si assuma:

$$R = 2 \, \Omega$$

$$C = 1 \, \text{mF}$$

$$L = 4 \, \text{mH}$$

Calcolare l'espressione analitica del movimento di y in risposta ad uno scalino unitario della corrente u .

Sostituendo i valori numerici dei parametri si ottiene la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{5 \cdot 10^5}{s^2 + 500s + 25 \cdot 10^4}$$

Posto $U(s) = \frac{1}{s}$ si ha

$$Y(s) = \frac{5 \cdot 10^5}{s^2 + 500s + 25 \cdot 10^4} \cdot \frac{1}{s}$$

e utilizzando lo sviluppo di Heaviside

$$Y(s) = \frac{2}{s} - 2 \left[\frac{s + 250}{(s + 250)^2 + (250\sqrt{3})^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{250\sqrt{3}}{(s + 250)^2 + (250\sqrt{3})^2} \right]$$

da cui, antitrasformando si ottiene

$$y(t) = 2 \left[1 - \left(\cos(250\sqrt{3}t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(250\sqrt{3}t) \right) e^{-250t} \right], \quad t \geq 0$$

1.4) Direttamente a partire dalla funzione di trasferimento, dedurre le principali caratteristiche della risposta allo scalino (valore di regime, tempo di assestamento, ampiezza della massima sovraelongazione, periodo delle oscillazioni).

Posto il denominatore di $G(s)$ nella forma $s^2 + 2\mathbf{x}\mathbf{w}_n s + \mathbf{w}_n^2$ si ricavano i valori della pulsazione naturale e dello smorzamento dei poli:

$$\mathbf{w}_n = 500, \quad \mathbf{x} = 0.5$$

Valore di regime

$$\mathbf{m} = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = 2V$$

Tempo di assestamento

$$t_a \cong \frac{5}{\mathbf{x}\mathbf{w}_n} = 0.02 \text{ sec}$$

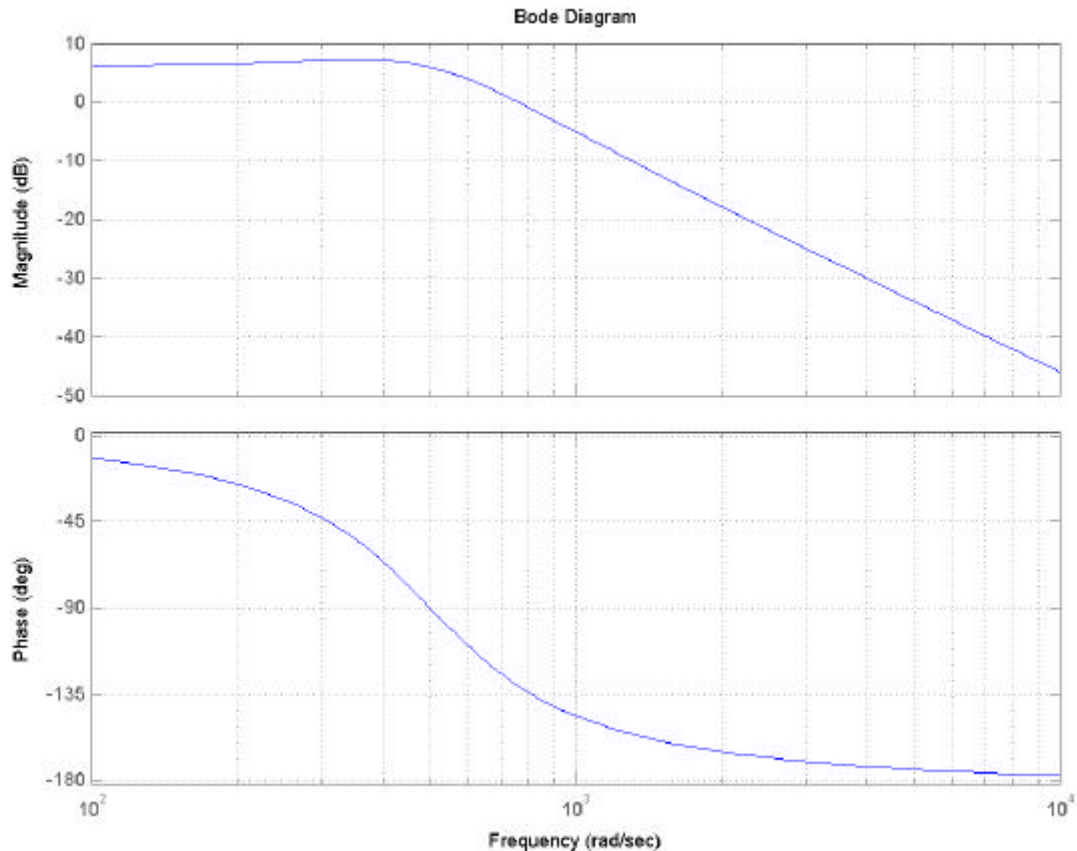
Ampiezza della massima sovraelongazione

$$y_{\max} = \mathbf{m} \left(1 + e^{-\frac{\mathbf{x}p}{\sqrt{1-\mathbf{x}^2}}} \right) \cong 2.33V$$

Periodo delle oscillazioni

$$T_M = \frac{2p}{\mathbf{w}_n \sqrt{1-\mathbf{x}^2}} \cong 0.014 \text{ sec}$$

1.5) Tracciare, anche in modo approssimato i diagrammi di Bode del modulo e della fase associati al sistema.



1.6) Valutare l'andamento a transitorio esaurito della tensione y quando la corrente u assume l'andamento $u(t) = \sin(500t)$, dove la corrente è misurata in Ampere e la pulsazione è misurata in radianti al secondo.

In accordo al teorema della risposta in frequenza, l'uscita $y(t)$ presenterà un andamento sinusoidale con la stessa pulsazione dell'ingresso $u(t)$:

$$y(t) = |G(j500)| \sin(500t + \angle G(j500))$$

Mediante semplici calcoli si ottiene:

$$|G(j500)| = \frac{5 \cdot 10^5}{\sqrt{(25 \cdot 10^4 - 500^2)^2 + (500 \cdot 500)^2}} = 2$$

$$\angle G(j500) = -\angle[(25 \cdot 10^4 - 500^2) + j500 \cdot 500] = -\frac{p}{2}$$

In conclusione, quindi:

$$y(t) = 2 \sin(500t - p/2)$$

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema descritto dallo schema a blocchi di Fig. 2.

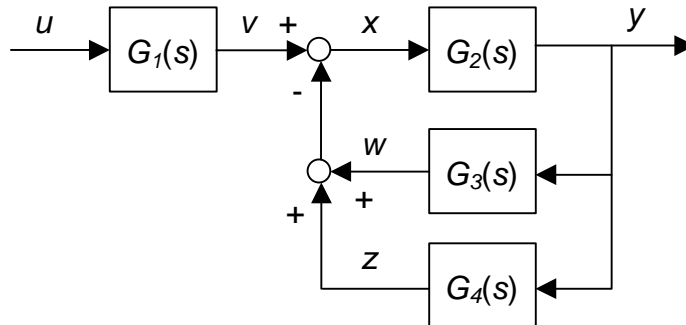


Fig. 2

$$G_1(s) = \frac{1}{s+5} \quad , \quad G_2(s) = \frac{s+2}{s+12} \quad , \quad G_3(s) = 10 \quad , \quad G_4(s) = \frac{20}{s+10}$$

2.1) Calcolare la funzione di trasferimento tra l'ingresso u e l'uscita y .

La funzione di trasferimento tra l'ingresso u e l'uscita y è composta dalla serie di G_1 con il sistema costituito dalla retroazione negativa tra il blocco G_2 ed il parallelo dei blocchi G_3 e G_4 :

$$G(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_2(s)(G_3(s) + G_4(s))}$$

Sostituendo infine le espressioni date si ottiene:

$$G(s) = \frac{(s+2)(s+10)}{(s+5)(s+12)(11s+30)}$$

2.2) Giudicare la stabilità del sistema complessivo.

Dall'espressione precedente si nota che tutti i poli di $G(s)$ hanno parte reale negativa. Inoltre non sono avvenute cancellazioni polo/zero perché il grado del denominatore è 3, uguale alla somma dei gradi dei denominatori. Si può quindi affermare che il sistema complessivo è asintoticamente stabile.

2.3) Determinare i valori di equilibrio per le variabili v , x , w , z , y quando l'ingresso u è costante e uguale a \bar{u} .

Utilizzando il teorema del valore finale e le definizioni dei segnali di Fig. 2 si ricava:

$$\bar{v} = G_1(0)\bar{u} = 0.2\bar{u}$$

$$\bar{w} = G_3(0)\bar{y} = \frac{1}{9}\bar{u}$$

$$\bar{z} = G_4(0)\bar{u} = \frac{1}{45}\bar{u}$$

$$\bar{x} = \bar{v} - (\bar{w} + \bar{z}) = \frac{1}{15}\bar{u}$$

$$\bar{y} = G(0)\bar{u} = \frac{1}{90}\bar{u}$$

2.4) Ricavare un'approssimazione a poli dominanti del sistema complessivo.

Nell'approssimazione a poli dominanti si conservano il polo più vicino all'asse immaginario con costante di tempo $T = \frac{11}{30}$ sec (polo dominante) e lo zero con costante di tempo $t = \frac{1}{2}$ sec compreso tra tale polo e l'asse immaginario. Bisogna inoltre fare in modo che l'approssimante abbia lo stesso guadagno della funzione di trasferimento originaria.

Si ottiene perciò:

$$G(s) \cong \frac{1}{6} \frac{s+2}{(11s+30)}$$