

Fondamenti di automatica – Laurea on Line

Prova in itinere PI04

Si voglia descrivere mediante un sistema dinamico a tempo discreto l'evoluzione della popolazione degli studenti LoL, utilizzando le seguenti variabili:

$s_1(k)$ numero di studenti che all'inizio dell'anno accademico k hanno acquisito un numero di crediti minore di 60 (classe 1);

$s_2(k)$ numero di studenti che all'inizio dell'anno accademico k hanno acquisito un numero di crediti compreso tra 60 e 120 (classe 2);

$s_3(k)$ numero di studenti che all'inizio dell'anno accademico k hanno acquisito un numero di crediti compreso tra 120 e 180 (classe 3);

$u(k)$ numero di matricole che si iscrivono alla LoL nell'anno accademico k ;

$y(k)$ numero di laureati nell'anno accademico k .

Trascurando l'immissione di studenti con crediti pregressi derivanti da esami già sostenuti al di fuori della LoL (le uniche iscrizioni riguardano cioè gli immatricolati con zero crediti), il modello può essere così formulato:

$$\begin{aligned}s_1(k+1) &= (1 - \mathbf{a}_1)s_1(k) + u(k) - \mathbf{b}_1s_1(k) \\s_2(k+1) &= (1 - \mathbf{a}_2)s_2(k) + \mathbf{a}_1s_1(k) - \mathbf{b}_2s_2(k) \\s_3(k+1) &= (1 - \mathbf{a}_3)s_3(k) + \mathbf{a}_2s_2(k) - \mathbf{b}_3s_3(k) \\y(k) &= \mathbf{a}_3s_3(k)\end{aligned}$$

dove il coefficiente \mathbf{a}_i rappresenta la frazione di studenti della classe i che da un anno all'altro viene “promossa” alla classe $i+1$ (oppure si laurea, se $i = 3$), mentre il coefficiente \mathbf{b}_i è il tasso di “abbandono” nell'ambito della classe i .

Si supponga che i coefficienti assumano i seguenti valori:

$$\mathbf{a}_1 = 0.7 \quad , \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 = 0.8 \quad , \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 = 0.1 \quad , \quad \mathbf{b}_3 = 0.05$$

Nota: Naturalmente, per semplicità, supponiamo che le variabili del sistema siano espresse da valori reali e non interi, come invece dovrebbe essere per ragioni di “quantizzazione” (come è fatto un “mezzo studente”?!).

Problemi proposti

- 1) Si scrivano le matrici di una possibile rappresentazione di stato del sistema.
- 2) Si disegni una rappresentazione del sistema in termini di schemi a blocchi in cui compaiano esplicitamente e singolarmente tutte le variabili di stato.
- 3) Determinare la condizione di equilibrio corrispondente all'iscrizione ogni anno di un numero di matricole costante e pari a 150.
- 4) Giudicare la stabilità della condizione di equilibrio individuata, spiegando poi come questo si riflette sul comportamento dinamico del sistema.
- 5) Ricavare la funzione di trasferimento tra il numero di matricole u e il numero di laureati y .
- 6) Scrivere la rappresentazione in forma ARMA (cioè mediante una singola equazione alle differenze) del legame tra u e y .
- 7) Valutare, anche in modo approssimato, il tempo necessario perchè il sistema vada in pratica a regime quando si parte da stato iniziale nullo e l'ingresso u è costante. Verificare poi in simulazione la correttezza della valutazione.
- 8) Si supponga ora che si inneschi un meccanismo di “feedback psicologico” per cui il numero di matricole che si iscrive alla LoL nell'anno k sia proporzionale, attraverso un parametro m , al numero di laureati nell'anno precedente, risulti cioè

$$u(k) = m y(k-1)$$

Spiegare come si potrebbe impostare l'analisi per verificare se un tale meccanismo, al variare di m , genera o meno l'instabilità del sistema.