

Fondamenti di automatica – Laurea on Line

Prova in itinere PI04 – traccia della soluzione

Si voglia descrivere mediante un sistema dinamico a tempo discreto l'evoluzione della popolazione degli studenti LoL, utilizzando le seguenti variabili:

$s_1(k)$ numero di studenti che all'inizio dell'anno accademico k hanno acquisito un numero di crediti minore di 60 (classe 1);

$s_2(k)$ numero di studenti che all'inizio dell'anno accademico k hanno acquisito un numero di crediti compreso tra 60 e 120 (classe 2);

$s_3(k)$ numero di studenti che all'inizio dell'anno accademico k hanno acquisito un numero di crediti compreso tra 120 e 180 (classe 3);

$u(k)$ numero di matricole che si iscrivono alla LoL nell'anno accademico k ;

$y(k)$ numero di laureati nell'anno accademico k .

Trascurando l'immissione di studenti con crediti pregressi derivanti da esami già sostenuti al di fuori della LoL (le uniche iscrizioni riguardano cioè gli immatricolati con zero crediti), il modello può essere così formulato:

$$\begin{aligned}s_1(k+1) &= (1 - \mathbf{a}_1)s_1(k) + u(k) - \mathbf{b}_1s_1(k) \\s_2(k+1) &= (1 - \mathbf{a}_2)s_2(k) + \mathbf{a}_1s_1(k) - \mathbf{b}_2s_2(k) \\s_3(k+1) &= (1 - \mathbf{a}_3)s_3(k) + \mathbf{a}_2s_2(k) - \mathbf{b}_3s_3(k) \\y(k) &= \mathbf{a}_3s_3(k)\end{aligned}$$

dove il coefficiente \mathbf{a}_i rappresenta la frazione di studenti della classe i che da un anno all'altro viene “promossa” alla classe $i+1$ (oppure si laurea, se $i = 3$), mentre il coefficiente \mathbf{b}_i è il tasso di “abbandono” nell'ambito della classe i .

Si supponga che i coefficienti assumano i seguenti valori:

$$\mathbf{a}_1 = 0.7 \quad , \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 = 0.8 \quad , \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 = 0.1 \quad , \quad \mathbf{b}_3 = 0.05$$

Nota: Naturalmente, per semplicità, supponiamo che le variabili del sistema siano espresse da valori reali e non interi, come invece dovrebbe essere per ragioni di “quantizzazione” (come è fatto un “mezzo studente”?!).

1) Si scrivano le matrici di una possibile rappresentazione di stato del sistema.

Definendo il vettore di stato

$$x(k) = \begin{bmatrix} s_1(k) \\ s_2(k) \\ s_3(k) \end{bmatrix}$$

il modello può essere posto nella forma

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1 & 0 & 0 \\ \mathbf{a}_1 & 1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_2 & 1 - \mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 0 \quad \mathbf{a}_3]$$

2) Si disegni una rappresentazione del sistema in termini di schemi a blocchi in cui compaiano esplicitamente e singolarmente tutte le variabili di stato.

Applicando la trasformata Zeta alle singole equazioni del sistema e ponendo per semplicità $\mathbf{g}_i = 1 - \mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i$, si ottiene

$$X_1(z) = \frac{1}{z - \mathbf{g}_1} U(z) = G_1(z) U(z)$$

$$X_2(z) = \frac{\mathbf{a}_1}{z - \mathbf{g}_2} X_1(z) = G_2(z) X_1(z)$$

$$X_3(z) = \frac{\mathbf{a}_2}{z - \mathbf{g}_3} X_2(z) = G_3(z) X_2(z)$$

$$Y(z) = \mathbf{a}_3 X_3(z)$$

Il sistema è quindi descritto dallo schema a blocchi di Fig. 1.

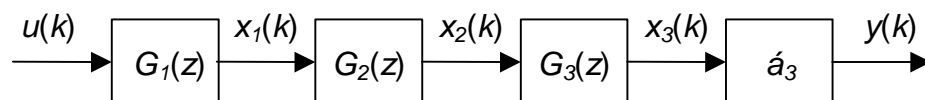


Fig. 1

3) Determinare la condizione di equilibrio corrispondente all'iscrizione ogni anno di un numero di matricole costante e pari a 150.

Risolvendo il sistema $x = Ax + B\bar{u}$ con $\bar{u} = 150$ (oppure dallo schema a blocchi di Fig. 1, usando i guadagni $G_i(1)$ al posto delle funzioni di trasferimento $G_i(z)$), si trova che lo stato di equilibrio è

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 187.50 \\ 145.83 \\ 137.25 \end{bmatrix}$$

La corrispondente uscita di equilibrio è $\bar{y} = \mathbf{a}_3 \bar{x}_3 = 109.80$.

4) Giudicare la stabilità della condizione di equilibrio individuata, spiegando poi come questo si riflette sul comportamento dinamico del sistema.

Il sistema è lineare e quindi la stabilità dello stato di equilibrio dipende dagli autovalori della matrice A . Dato che la matrice A ha una struttura triangolare, i suoi autovalori coincidono con gli elementi sulla diagonale e valgono perciò

$$\mathbf{g}_1 = 0.2, \mathbf{g}_2 = 0.1, \mathbf{g}_3 = 0.15$$

Avendo tutti e tre modulo inferiore a 1, l'equilibrio è asintoticamente stabile. Se il sistema viene allontanato dall'equilibrio tende quindi a tornarci spontaneamente.

5) Ricavare la funzione di trasferimento tra il numero di matricole u e il numero di laureati y .

Dallo schema di Fig. 1 (oppure dalla formula $G(z) = C(zI - A)^{-1}B$) si ricava

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3}{(z - \mathbf{g}_1)(z - \mathbf{g}_2)(z - \mathbf{g}_3)} = \frac{0.448}{(z - 0.2)(z - 0.1)(z - 0.15)}$$

6) Scrivere la rappresentazione in forma ARMA (cioè mediante una singola equazione alle differenze) del legame tra u e y .

Dalla funzione di trasferimento risulta

$$(z - 0.2)(z - 0.1)(z - 0.15)Y(z) = 0.448U(z)$$

ovvero

$$(z^3 - 0.45z^2 + 0.065z - 0.003)Y(z) = 0.448U(z)$$

Ricordando il significato di z come operatore di anticipo unitario, risulta quindi

$$y(k+3) - 0.45y(k+2) + 0.065y(k+1) - 0.003y(k) = 0.448u(k)$$

ovvero anche

$$y(k) = 0.45y(k-1) - 0.065y(k-2) + 0.003y(k-3) + 0.448u(k-3)$$

che è la forma ARMA cercata.

7) Valutare, anche in modo approssimato, il tempo necessario perchè il sistema vada in pratica a regime quando si parte da stato iniziale nullo e l'ingresso u è costante. Verificare poi in simulazione la correttezza della valutazione.

Il polo dominante, cioè quello associato alla dinamica più lenta, è il polo in $z = 0.2$. L'associata esponenziale discreta va praticamente a regime dopo un numero di istanti pari a

$$k_a \cong -\frac{5}{\ln(0.2)} \cong 3.11$$

Inoltre, tenendo conto del fatto che la funzione di trasferimento ha un grado relativo (differenza tra grado del denominatore e grado del numeratore) pari a 3, c'è un ritardo netto di 3 istanti prima che l'uscita risenta dell'ingresso. In conclusione, il sistema dovrebbe andare a regime dopo circa $3 + 3.11 = 6.11 \cong 6$ passi.

In effetti, usando iterativamente le equazioni del sistema con $u = 150$ e partendo da $x(0) = 0$, si trova

$$\begin{array}{ll} x(1) = \begin{bmatrix} 150 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, y(1) = 0 & x(2) = \begin{bmatrix} 180 \\ 105 \\ 0 \end{bmatrix}, y(2) = 0 \\ x(3) = \begin{bmatrix} 186 \\ 136.50 \\ 84 \end{bmatrix}, y(3) = 67.2 & x(4) = \begin{bmatrix} 187.2 \\ 143.85 \\ 121.80 \end{bmatrix}, y(4) = 97.44 \\ x(5) = \begin{bmatrix} 187.44 \\ 145.43 \\ 133.35 \end{bmatrix}, y(5) = 106.68 & x(6) = \begin{bmatrix} 187.49 \\ 145.75 \\ 136.34 \end{bmatrix}, y(6) = 109.07 \\ x(7) = \begin{bmatrix} 187.50 \\ 145.82 \\ 137.05 \end{bmatrix}, y(7) = 109.64 & \dots\dots\dots \end{array}$$

Quindi dopo 6, 7 passi i valori dello stato e dell'uscita sono prossimi (a meno di un errore inferiore all'1%) a quelli di equilibrio.

8) Si supponga ora che si inneschi un meccanismo di “feedback psicologico” per cui il numero di matricole che si iscrive alla LoL nell'anno k sia proporzionale, attraverso un parametro m , al numero di laureati nell'anno precedente, risulti cioè

$$u(k) = m y(k-1)$$

Spiegare come si potrebbe impostare l'analisi per verificare se un tale meccanismo, al variare di m , genera o meno l'instabilità del sistema.

La situazione descritta può essere rappresentata come in Fig. 2.

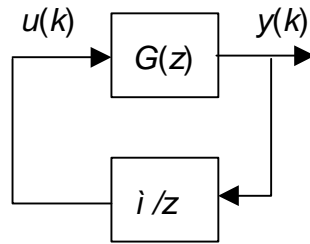


Fig. 2

La stabilità di questo sistema retroazionato dipende dalle soluzioni dell'equazione

$$1 - \frac{mG(z)}{z} = 0$$

cioè dalle radici del polinomio caratteristico in anello chiuso

$$j(z) = z(z - 0.2)(z - 0.1)(z - 0.15) - 0.448m$$

e in particolare dal fatto che tali radici abbiano modulo minore di 1.

Operando con strumenti di calcolo evoluti che permettano di calcolare le radici del polinomio al variare del parametro m , si trova che tale condizione è soddisfatta (per valori positivi di m) solo quando m è inferiore al valore $m_{MAX} \cong 1.366$.