

ESERCIZIO

Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Fx_k + Gu_k \\ y_k &= Hx_k\end{aligned}\quad F = \begin{bmatrix} 0 & -0.6 \\ 0.4 & 1.1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad H = [1 \quad 0]$$

1) Giudicare la stabilità del sistema.

2) Scrivendo la relazione ingresso/uscita sotto forma di un'equazione alle differenze del tipo

$$y_k = a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + b_1 u_{k-1} + b_2 u_{k-2}$$

determinare i valori dei coefficienti a_1 , a_2 , b_1 , b_2 .

3) Dopo aver disegnato la posizione nel piano complesso dei poli e degli zeri del sistema, dire se il sistema possiede un polo dominante e, in caso affermativo, valutare in base ad esso le caratteristiche principali della risposta all'impulso.

4) Determinare i primi 3 valori y_0 , y_1 , y_2 e il valore asintotico y_∞ della risposta allo scalino.

SOLUZIONE

1) Gli autovalori della matrice F valgono 0.8 e 0.3. Poiché entrambi hanno modulo minore di 1, il sistema è asintoticamente stabile.

2) La funzione di trasferimento del sistema vale

$$W(z) = \frac{-4.2}{z^2 - 1.1z + 0.24}$$

Quindi, osservando i coefficienti dei polinomi a numeratore e denominatore, risulta

$$a_1 = 1.1 \quad , \quad a_2 = -0.24 \quad , \quad b_1 = 0 \quad , \quad b_2 = -4.2$$

3) Il sistema non ha zeri e i due poli (coincidenti con gli autovalori di F) valgono 0.8 e 0.3. Pertanto il sistema possiede un polo dominante in 0.8. La risposta all'impulso tende a zero (a causa dell'asintotica stabilità) con un tempo di assestamento che si può valutare come

$$k_a = \frac{-5}{\ln 0.8} \cong 22$$

4) Dalla relazione ingresso/uscita del punto 2 si ricava che

$$y_0 = 0 \quad , \quad y_1 = 0 \quad , \quad y_2 = -4.2$$

mentre il valore asintotico coincide con il guadagno

$$y_\infty = \mathbf{m} = W(1) = -30$$