

ESERCIZIO

Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} x_k\end{aligned}$$

- 1) Verificare se il sistema è asintoticamente stabile.
- 2) Determinare le eventuali uscite di equilibrio corrispondenti all'ingresso $u_k = 1$.
- 3) Spiegare cosa significa affermare che la trasformazione di variabili

$$\tilde{x}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x_k$$

genera una rappresentazione di stato equivalente a quella originaria.

- 4) Verificare che gli autovalori associati alla rappresentazione equivalente del punto 3 coincidono con quelli originari.
- 5) Verificare che la funzione di trasferimento associata alla rappresentazione equivalente del punto 3 è identica a quella originaria.

SOLUZIONE

1) Il sistema possiede due autovalori coincidenti in $z = -2$. Avendo essi modulo maggiore di 1, il sistema è instabile.

2) Imponendo $x_{k+1} = x_k$, si trova che l'uscita di equilibrio vale $y = 2/3$.

3) Si veda la lezione sulle rappresentazioni equivalenti di sistemi a tempo discreto.

4) Indicando con T la matrice di trasformazione, si trova che in questo caso $T^T = T$. E' facile poi verificare che la matrice

$$TFT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

ha ancora gli stessi autovalori di F .

5) La funzione di trasferimento del sistema originario è

$$W(z) = H(zI - F)^{-1}G = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z+1 & -1 \\ 1 & z+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{z+2}$$

e risulta identica a quella del sistema equivalente, data da

$$\tilde{W}(z) = HT^{-1}(zI - TFT^{-1})^{-1}TG = \begin{bmatrix} 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & 1 \\ -4 & z+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{2}{z+2}$$