

ESERCIZIO

Si consideri il sistema dinamico con ingresso u e uscita y descritto dalle seguenti equazioni:

$$4\dot{w}(t) + 6w(t) + z(t) = 0$$

$$2\dot{z}(t) - 26w(t) + z(t) = 2u(t)$$

$$y(t) = 16z(t)$$

- 1) Calcolare gli autovalori del sistema e da essi giudicare le proprietà di stabilità.
- 2) Determinare tipo, poli, zeri e guadagno della funzione di trasferimento tra u e y .
- 3) Si consideri la risposta del sistema ad uno scalino unitario. Senza calcolarla esplicitamente, indicarne le caratteristiche seguenti:

1. tende asintoticamente a [a] 0 [b] 6 [c] 8 [d] 16 [e] ∞
2. il tempo di assestamento è circa [a] 1 [b] 2 [c] 5 [d] 10 [e] 20
3. presenta oscillazioni [a] smorzate [b] periodiche [c] divergenti
oppure [d] non presenta oscillazioni
4. ha una derivata iniziale [a] nulla [b] negativa [c] positiva

SOLUZIONE

Si osservi prima di tutto che, utilizzando w e z come variabili di stato, il sistema può essere rappresentato come

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

$$\text{con } A = \begin{bmatrix} -3/2 & -1/4 \\ 13 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 16].$$

1) Gli autovalori sono le radici del polinomio

$$j(s) = \det(sI - A) = (s + 3/2)(s + 1/2) + 13/4 = s^2 + 2s + 4$$

che sono complesse coniugate e valgono $s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3}$.

2) La funzione di trasferimento è data da

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2 + 2s + 4} \begin{bmatrix} 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 1/2 & -1/4 \\ 13 & s + 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{16s + 24}{s^2 + 2s + 4}$$

Pertanto, il tipo g è nullo, il guadagno vale $m = G(0) = 6$, c'è uno zero in $s = -3/2$ e i poli, che coincidono con gli autovalori, valgono $-1 \pm j\sqrt{3}$.

3.1) [b] perché è il valore del guadagno.

3.2) [c] perché il tempo di assestamento è circa pari a $5/s$, se $-s$ è la parte reale dei poli.

3.3) [a] perché il sistema possiede due poli stabili complessi coniugati

3.4) [c] per la presenza dello zero (si veda anche il teorema del valore iniziale).