

## ESERCIZIO

Si consideri il sistema dinamico non lineare del primo ordine descritto dalle equazioni

$$\dot{x}(t) = -x(t) + x^2(t) + u(t)$$

$$y(t) = 2x(t)$$

- 1) Determinare il minimo valore dell'ingresso  $u$  per cui il sistema non ammette alcuno stato di equilibrio.
- 2) Si ponga ora  $u = -2$ . Verificare che esistono due distinti stati di equilibrio, uno asintoticamente stabile e l'altro instabile.
- 3) Scegliendo lo stato di equilibrio instabile trovato al punto precedente ed indicando con i simboli  $\mathbf{dx}(t)$ ,  $\mathbf{du}(t)$  e  $\mathbf{dy}(t)$  le variazioni rispetto ai valori di equilibrio di stato, ingresso e uscita, si scrivano le equazioni del sistema linearizzato.
- 4) Sulla base del sistema linearizzato si ricavi l'andamento di  $\mathbf{dy}(t)$  quando  $\mathbf{du}(t) = \text{sca}(t)$  e  $\mathbf{dx}(0) = 0$ .



## SOLUZIONE

1) Gli eventuali stati di equilibrio corrispondenti ad un dato valore  $u$  dell'ingresso sono le soluzioni reali dell'equazione

$$x^2 - x + u = 0$$

Tale equazione non ha soluzioni reali per  $u > 1/4$ . Pertanto  $u = 1/4$  è l'estremo inferiore (non il minimo) dei valori per cui il sistema non ammette equilibrio.

2) In corrispondenza di  $u = -2$  si trovano gli stati di equilibrio  $x = 2$  e  $x = -1$ . Per giudicare la stabilità, si determini la "matrice" dinamica  $f_x$  del sistema linearizzato. Si trova

$$f_x(x, u) = -1 + 2x$$

In corrispondenza di  $x = 2$ , l'unico autovalore è positivo ( $f_x = 3$ ) e lo stato di equilibrio è quindi instabile.

In corrispondenza di  $x = -1$ , l'unico autovalore è negativo ( $f_x = -3$ ) e lo stato di equilibrio è asintoticamente stabile.

3) Il sistema linearizzato nell'intorno di  $x = 2$  è

$$d\dot{x}(t) = 3dx(t) + du(t)$$

$$dy(t) = 2dx(t)$$

4) Utilizzando la formula di Lagrange per il calcolo del movimento forzato, la risposta allo scalino è data da

$$dy(t) = 2 \int_0^t e^{3(t-\tau)} d\tau = 2e^{3t} \int_0^t e^{-3\tau} d\tau = 2e^{3t} \left[ -\frac{e^{-3\tau}}{3} \right]_0^t = -\frac{2}{3} e^{3t} (e^{-3t} - 1) = -\frac{2}{3} (1 - e^{3t})$$