

## ESERCIZIO

Si consideri il sistema dinamico:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t)\end{aligned}\quad A = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = [10 \quad 0]$$

- 1) Calcolando la traccia della matrice  $A$ , formulare una condizione necessaria per l'asintotica stabilità del sistema.
- 2) Determinare i valori del parametro  $\mathbf{a}$  per cui il sistema è asintoticamente stabile.
- 3) Dire se esistono un valore costante dell'ingresso  $u$  ed un valore del parametro  $\mathbf{a}$  per cui lo stato di equilibrio è  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ .
- 4) In corrispondenza del valore di  $\mathbf{a}$  trovato al punto precedente, determinare il guadagno statico del sistema.

## SOLUZIONE

1) Risulta  $\text{tr}(A) = \mathbf{a} - 2$ . Condizione necessaria per l'asintotica stabilità del sistema è che  $\text{tr}(A) < 0$ , ovvero  $\mathbf{a} < 2$ .

2) Il polinomio caratteristico è

$$\mathbf{p}(s) = \det(sI - A) = s^2 + (2 - \mathbf{a})s - 1 - 2\mathbf{a}$$

Per un sistema del secondo ordine, la concordanza di segno dei coefficienti del polinomio caratteristico è condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità. In questo caso si ottiene

$$2 - \mathbf{a} > 0$$

$$-1 - 2\mathbf{a} > 0$$

ovvero  $\mathbf{a} < -1/2$ .

3) Occorre risolvere nelle incognite  $\mathbf{a}$  e  $u$  il sistema di equazioni

$$A\bar{x} + bu = 0$$

Si trova così  $\mathbf{a} = 2$ ,  $\bar{u} = 5$ .

4) Poiché il sistema per  $\mathbf{a} = 2$  non possiede autovalori nulli, il guadagno statico si ottiene come rapporto all'equilibrio tra uscita e ingresso. Perciò

$$\mathbf{m} = \frac{c\bar{x}}{\bar{u}} = \frac{10}{5} = 2$$