

ESERCIZIO

Si consideri il sistema dinamico:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = cx(t) + du(t)$$

dove l'ingresso u e l'uscita y sono scalari, mentre lo stato x è un vettore di dimensione $n > 1$.

1) Si scrivano le formule che esprimono il movimento dello stato a partire dall'istante $t=0$ e a partire dall'istante generico $t=t_0$.

2) Determinare l'espressione dell'uscita $y(t)$ del sistema quando $u(t)$ è uno scalino unitario e $x(0)$ è una generica condizione iniziale all'istante $t=0$.

3) Quando $A=0$ (cioè A è una matrice nulla di dimensione n) verificare che la differenza tra due risposte (dell'uscita y) allo scalino unitario calcolate a partire da due diverse condizioni iniziali $x'(0)$ e $x''(0)$ rimane costante.

4) Ponendo $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c = [1 \quad 2]$, $d=0$, verificare che esiste almeno una condizione iniziale $x(0) \neq 0$ per cui la risposta allo scalino (dell'uscita y) è identicamente nulla.

SOLUZIONE

1) Movimento a partire da $t=0$:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau, t \geq 0$$

Movimento a partire da $t=t_0$:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau, t \geq t_0$$

2) La risposta ad uno scalino unitario con stato iniziale $x(0)$ è data da

$$y(t) = ce^{At}x(0) + c \int_0^t e^{A(t-\tau)}bd\tau + d, t \geq 0$$

3) Indicando con $y'(t)$ e $y''(t)$ le due uscite, e osservando che $e^{0t}=I$, la loro differenza risulta

$$y'(t) - y''(t) = ce^{At}(x'(0) - x''(0)) = c(x'(0) - x''(0))$$

e quindi è costante.

4) La risposta allo scalino è data da

$$y(t) = cx(0) + cbt + d = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

e risulta identicamente nulla quando

$$x_1(0) + 2x_2(0) = 0$$