

MATLAB - Esercizio 4 (Sezione 1)

Dato il sistema lineare a tempo continuo descritto in forma di stato

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

in cui

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

mentre la matrice di stato A assume uno dei seguenti valori

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Studiare la stabilità dei sistemi considerati.
2. Determinare lo stato e l'uscita di equilibrio corrispondente a $u(t) = \bar{u} = 5$.
3. Simulare il movimento libero dello stato $x(t)$ e dell'uscita $y(t)$ dei sistemi nell'intervallo $[0,10]$ con stato iniziale qualsiasi, verificando che gli andamenti ottenuti siano in accordo con i risultati forniti dall'analisi di stabilità.
4. Tracciare le traiettorie del sistema nel piano (x_1, x_2) .
5. Discutere qualitativamente l'andamento delle traiettorie dello stato e dell'uscita in relazione alle proprietà di stabilità del sistema (asintoticamente stabile, semplicemente stabile, instabile) ed alla natura degli autovalori (reali, complessi, immaginari puri).
6. Simulare la risposta allo scalino $u(t) = 5 * \text{sca}(t)$ nell'intervallo $[0,10]$, verificando che l'uscita converga verso il valore di equilibrio trovato.
7. Simulare il movimento del sistema nell'intervallo $[0,10]$ con $u(t) = \sin(2\pi t)$ e stato iniziale nullo.

Traccia di soluzione

- Per tracciare la traiettoria nel piano (punto 4) utilizzare il comando
» `plot(x(:,1), x(:,2))`
- Per rappresentare più curve sovrapposte sullo stesso grafico si può usare il comando `hold on` dopo il primo grafico e poi ripetere il comando di `plot` quante volte si vuole

Soluzione

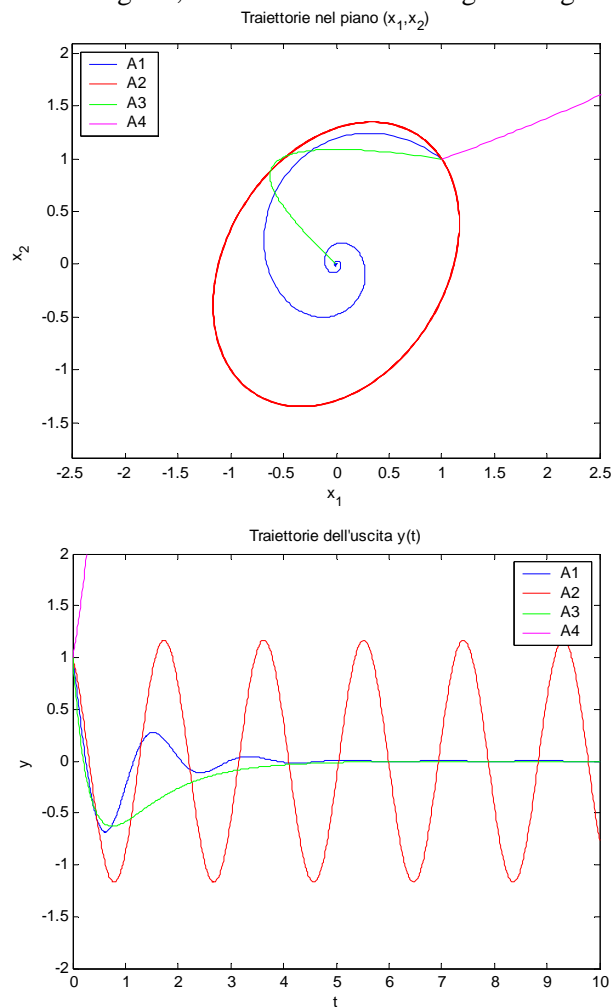
- ```
» %%% Punto 1
» A1 = [-1 -3; 4 -1]; B = [1 1]'; C = [1 0]; D = 0;
» systc = ss(A,B,C,0);
```
- Per studiare la stabilità si valuta la parte reale degli autovalori della matrice  $A$  con il comando `real(eig(A))`. I quattro sistemi sono nell'ordine asintoticamente stabile, semplicemente stabile, asintoticamente stabile, instabile
- ```
» %%% Punto 2
» ubar = 5;
» xbar = -inv(A)*B;
» ybar = C*xbar;
```

```

» %%% Punto 3
» t = 0:0.01:10; x0 = [1 1]';
» [y1,t1,x1] = initial(sistc,x0,t);
» figure(1); plot(t1,x1); grid on
» figure(2); plot(t1,y1); grid on
» %%% Punto 4
» plot(x(:,1),x(:,2))

```

- **Punto 5:** I risultati sono concordi con quelli ottenuti nell'analisi di stabilità. Nel caso di sistemi asintoticamente stabili ($A_1 - A_3$) il movimento dello stato e dell'uscita tendono asintoticamente a zero. In particolare se gli autovalori sono puramente reali (A_3) il movimento non presenta alcuna oscillazione, mentre nel caso di autovalori complessi (A_1) il movimento presenta oscillazioni ripetute. Nel caso di sistema semplicemente stabile (A_2) il movimento dello stato e dell'uscita si mantiene limitato senza mai convergere a zero. Infine nel caso di sistema instabile (A_4) il movimento dello stato e dell'uscita divergono, come illustrato nelle seguenti figure



```

» %%% Punto 6
» [ys,ts,xs] = step(sistc,t); ys = 5*ys; plot(ts,ys)

```

- Per la linearità del sistema la risposta ad uno scalino di ampiezza 5 si può ottenere moltiplicando per 5 la risposta del sistema ad uno scalino di ampiezza unitaria. Questa proprietà non vale per i sistemi non lineari

```

» %%% Punto 7
» t = 0:0.01:10; u = sin(2*pi*t); x0 = [0 0]';
» [y,t,x] = lsim(sistc,u,t,x0);
» figure(1); plot(t1,x1); grid on
» figure(2); plot(t1,y1); grid on

```