

Fondamenti di automatica – Laurea on Line
Prova finale PF - 17 febbraio 2003 – A.A. 2002/03
Traccia della soluzione

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico del secondo ordine descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 1]$$

1.1) Determinare quale ingresso u va applicato al sistema per fare in modo che il sistema stia in equilibrio con l'uscita uguale a $\bar{y} = 1$

Per ottenere un'uscita \bar{y} costante è necessario applicare al sistema un ingresso \bar{u} costante, e ovviamente anche lo stato \bar{x} sarà costante. Si ottiene quindi

$$\begin{cases} 0 = -2\bar{x}_1 + 8\bar{x}_2 \\ 0 = -10\bar{x}_2 + \bar{u} \\ \bar{y} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $\bar{x}_2 = \frac{1}{10}\bar{u}$, sostituendo la seconda nella prima si ottiene

$$\bar{x}_1 = 4\bar{x}_2 = \frac{2}{5}\bar{u}, \text{ infine sostituendo le prime due nella terza si ottiene } \bar{y} = \frac{2}{5}\bar{u} + \frac{1}{10}\bar{u} = \frac{1}{2}\bar{u},$$

cioè in definitiva $\bar{u} = 2\bar{y} = 2$. Il corrispondente stato di equilibrio risulta $\bar{x} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}$.

1.2) Giudicare la proprietà di stabilità del sistema.

Le proprietà di stabilità per un sistema a tempo continuo dipendono dal segno della parte reale degli autovalori della matrice A . Il polinomio caratteristico di A e i suoi autovalori sono

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(s) = \det(sI - A) &= \det \begin{bmatrix} s+2 & -8 \\ 0 & s+10 \end{bmatrix} = (s+2)(s+10) \\ &\begin{cases} s_1 = -2 \\ s_2 = -10 \end{cases} \end{aligned}$$

Poiché entrambi gli autovalori sono reali e negativi si deduce che il sistema risulta stabile. Sarebbe stato possibile ricavare gli autovalori della matrice A anche osservando che la matrice è triangolare, per cui i suoi autovalori coincidono con gli elementi sulla diagonale.

1.3) Calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$.

Per il calcolo della funzione di trasferimento applichiamo la definizione

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} s+2 & -8 \\ 0 & s+10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{(s+2)(s+10)} [1 \quad 1] \begin{bmatrix} s+10 & 8 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{(s+10)}{(s+2)(s+10)} = \frac{1}{s+2} = \frac{0.5}{1+0.5s} \end{aligned}$$

Nel calcolo della funzione di trasferimento si è verificata una cancellazione polo-zero, dunque il sistema è caratterizzato da una parte non raggiungibile e/o non osservabile (in questo caso non osservabile), che però è asintoticamente stabile perché le singolarità cancellate hanno parte reale negativa.

1.4) Supponendo che l'ingresso u sia uno scalino unitario, determinare:

(a) il valore a cui converge l'uscita quando lo stato iniziale è nullo

Il valore di regime si può trovare applicando il teorema del valore finale

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+2} = 0.5$$

oppure ricordando la definizione di guadagno $y(\infty) = G(0) = 0.5$.

(b) quanto tempo è necessario attendere perché il transitorio si possa considerare esaurito.

In prima approssimazione si può supporre che il tempo di assestamento dipenda dal solo polo dominante (polo più vicino all'asse immaginario), ovvero $s_1 = -2$. La costante di tempo associata vale $T = 0.5$, dunque il tempo di assestamento è pari a circa

$$t_a \cong 5T = 2.5 \text{ s}$$

Dire inoltre se e come i parametri (a) e (b) variano se si parte da uno stato iniziale diverso da zero.

In questo caso al movimento forzato dell'uscita si somma una componente libera che dipende dallo stato iniziale. Poiché il sistema è asintoticamente stabile tale componente tende ad annullarsi al crescere del tempo. Quindi il valore di regime dell'uscita non cambia. Inoltre il movimento libero è costituito da funzioni esponenziali associate agli autovalori del sistema. Il tempo necessario perché tali funzioni diventino trascurabili è ancora una volta valutabile attraverso il tempo di assestamento t_a . Dunque anch'esso non cambia.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema di controllo della Fig. 1 e si sappia che la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema da controllare ha tipo $g = 1$, guadagno positivo, non possiede poli con parte reale positiva, ed è rappresentata dai diagrammi di Bode mostrati in Fig. 2.

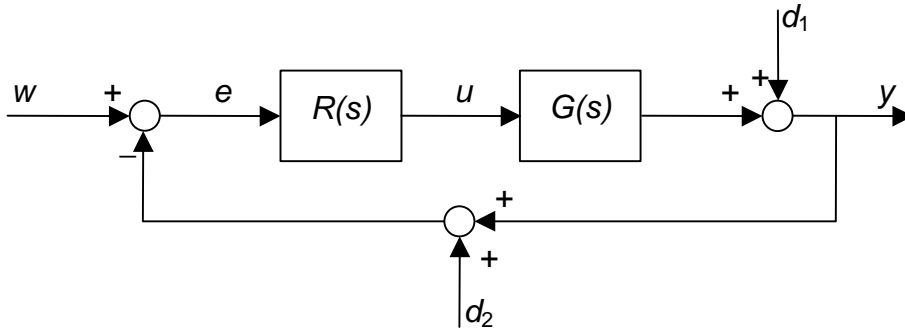


Fig. 1

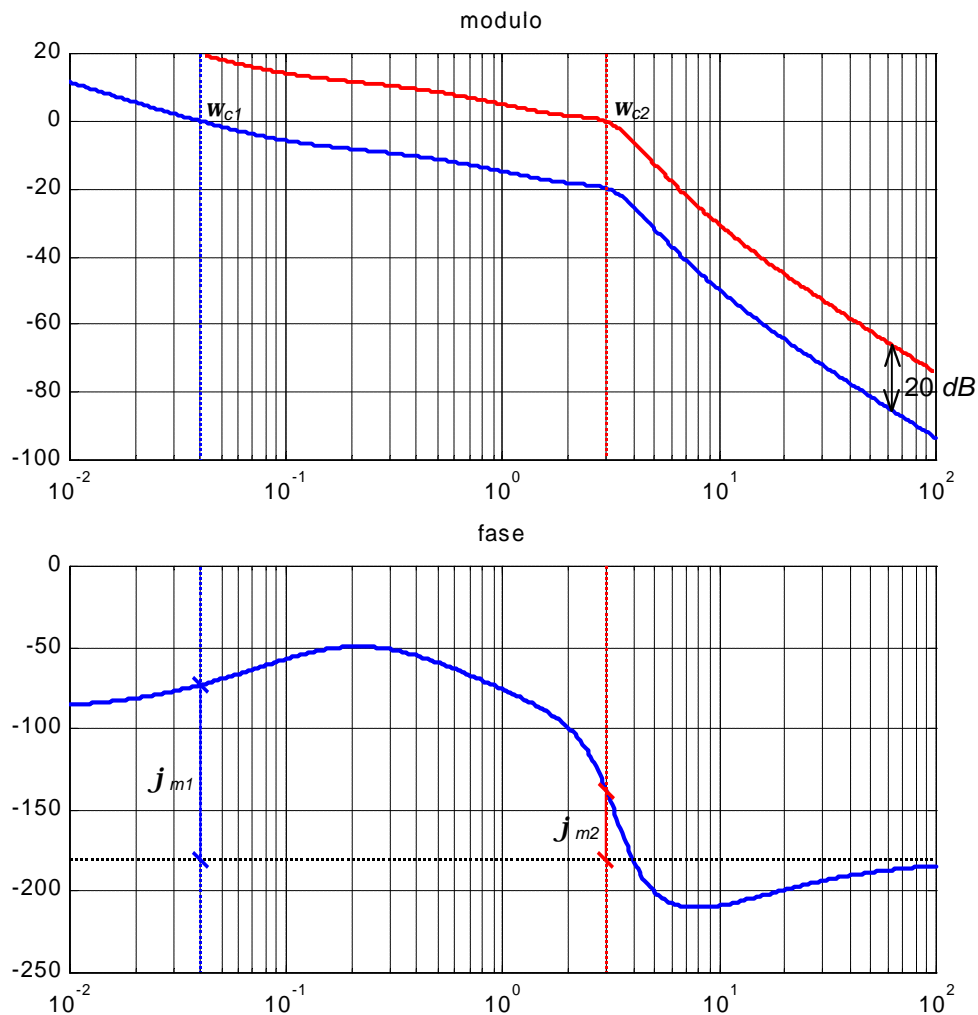


Fig. 2

2.1) Si confrontino le prestazioni ottenibili con i due differenti regolatori $R_1(s) = 1$ e $R_2(s) = 10$.

Dal momento che non viene fornita l'espressione della funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema, è necessario valutare i parametri indicati in maniera approssimata a partire dai diagrammi di Bode. La funzione d'anello nei due casi vale

$$\begin{aligned} L_1(s) &= R_1(s)G(s) = G(s) \\ L_2(s) &= R_2(s)G(s) = 10 G(s) \end{aligned}$$

quindi il diagramma di Bode del modulo della $L_1(s)$ coincide con quello della $G(s)$, indicato in blu nella figura, mentre il diagramma di Bode del modulo della $L_2(s)$ coincide con quello della $G(s)$ traslato verso l'alto di 20 dB, indicato in rosso nella figura.

Al contrario il diagramma di Bode della fase coincide con quello della $G(s)$ in entrambi i casi, perché il regolatore non introduce nuovi poli o zeri.

(a) Pulsazione critica

La pulsazione critica per i due regolatori è il valore della pulsazione in corrispondenza della quale il modulo della funzione d'anello interseca l'asse 0 dB, ovvero

$$\begin{aligned} \omega_{c1} &\cong 0.04 \text{ rad/s} \\ \omega_{c2} &\cong 3 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

(b) Margine di fase

Il margine di fase risulta invece pari a 180° meno il valore assoluto della fase critica, ovvero

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{m1} &\cong 110^\circ \\ \mathbf{j}_{m2} &\cong 45^\circ \end{aligned}$$

Osservazione: Dal momento che il guadagno della funzione d'anello è positivo ed il margine di fase risulta positivo per entrambi i regolatori, si può concludere per il criterio di Bode che entrambi i sistemi retroazionati sono asintoticamente stabili.

Il valore della pulsazione critica è legato alla velocità di risposta del sistema, dunque il secondo regolatore permetterà di avere tempi di assestamento molto inferiori al primo, infatti (tenendo conto che per il primo sistema il polo dominante è reale perché $\mathbf{j}_{m1} \cong 110^\circ \gg 75^\circ$)

$$t_{a1} \cong \frac{5}{\omega_{c1}} = 125 \text{ s} \quad t_{a2} \cong \frac{500}{\omega_{c2} \mathbf{j}_{m2}} = 3.7 \text{ s}$$

Il valore del margine di fase è invece legato allo smorzamento delle oscillazioni nella risposta a scalino. Il primo regolatore porta ad un sistema privo di oscillazioni nella risposta a scalino, perché il polo dominante è reale. Al contrario il secondo regolatore presenterà delle oscillazioni smorzate, perché i poli dominanti sono complessi coniugati con smorzamento $\mathbf{x} \cong \mathbf{j}_m/100 = 0.45$. L'ampiezza della massima sovraelongazione risulta $\mathbf{D} = \exp(-\mathbf{p}\mathbf{x} / \sqrt{1 - \mathbf{x}^2}) \cong 0.20$.

(c) Ampiezza dell'errore a transitorio esaurito in risposta ad un riferimento w a scalino

Dal momento che entrambe le funzioni d'anello includono un'azione integrale (essendo il tipo $g = 1$), l'errore a transitorio esaurito nella risposta ad uno scalino del riferimento sarà nullo.

(d) capacità di attenuare un generico disturbo d_1 sinusoidale o periodico

La funzione di trasferimento tra il disturbo d_1 e l'uscita y è pari alla funzione di sensibilità $S(s)$, assimilabile in prima approssimazione ad un filtro passa alto di banda passante $[\omega_c, \infty)$, ovvero $[0.04, \infty)$ per il primo regolatore e $[3, \infty)$ per il secondo.

Quindi un disturbo sinusoidale viene attenuato se ha pulsazione inferiore alla pulsazione critica, mentre per un generico disturbo periodico, che è scomponibile come somma di armoniche con pulsazioni multiple della pulsazione fondamentale, vengono attenuate solo le eventuali armoniche con pulsazioni inferiori alla pulsazione critica.

(e) capacità di attenuare un generico disturbo d_2 sinusoidale o periodico.

La funzione di trasferimento tra il disturbo d_2 e l'uscita y è pari alla funzione di sensitività complementare cambiata di segno $-F(s)$, assimilabile in prima approssimazione ad un filtro passa basso di banda $[0, \omega_c]$, ovvero $[0, 0.04]$ per il primo regolatore e $[0, 3]$ per il secondo. Quindi un disturbo sinusoidale viene attenuato se ha pulsazione superiori alla pulsazione critica, mentre per un generico disturbo periodico vengono attenuate solo le armoniche con pulsazioni superiori alla pulsazione critica.

2.2) Si spieghi come andrebbe realizzato ciascuno dei due regolatori in una versione digitale.

Per realizzare una versione digitale del regolatore occorre per prima cosa scegliere un passo di campionamento opportuno e successivamente operare una discretizzazione del regolatore. Utilizzando per la scelta della pulsazione di campionamento la regola empirica $5\omega_c \leq \omega_s \leq 50\omega_c$, si ottengono i seguenti intervalli

$$0.2 \text{ rad/s} \leq \omega_{s1} \leq 2 \text{ rad/s}$$

$$15 \text{ rad/s} \leq \omega_{s2} \leq 150 \text{ rad/s}$$

La discretizzazione dei regolatori è banale perché non possiedono nessun polo o zero

$$R_1(z) = 1 \quad R_2(z) = 10$$

La realizzazione dello schema di controllo digitale prevede poi l'inserimento di un campionatore e di un filtro antialiasing a monte del regolatore, e di un mantenitore a valle dello stesso.