

Fondamenti di automatica – Laurea on Line
Prova di recupero PR02 - 17 febbraio 2003 – A.A. 2002/03
Traccia della soluzione

Si consideri il sistema di controllo in anello chiuso di Fig. 1, dove il sistema da controllare è descritto dalla funzione di trasferimento $G(s) = \frac{5}{(1+s)}$ mentre il regolatore $R(s)$ è un controllore ad azione puramente proporzionale con guadagno $K_P = 4$.

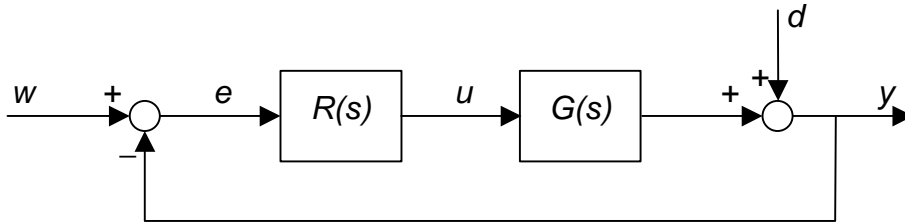
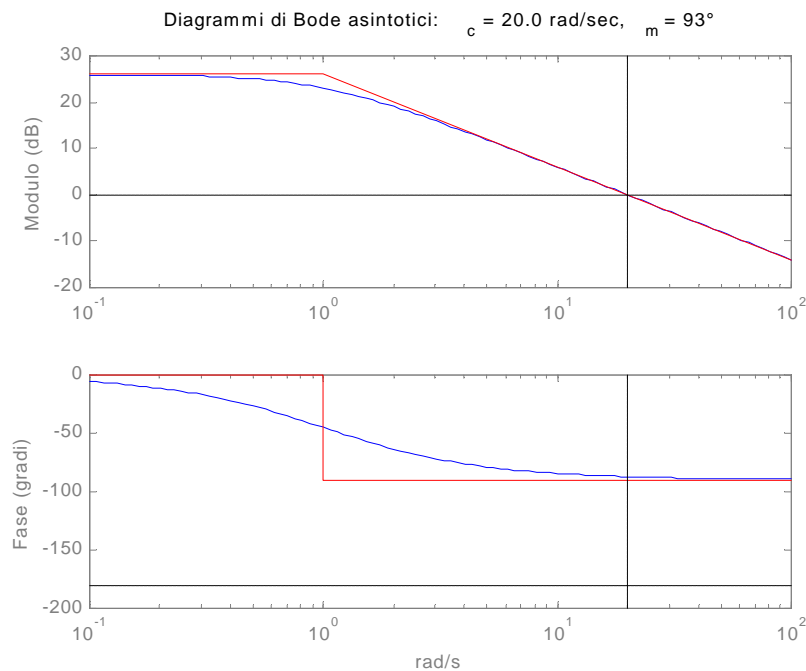


Fig. 1

Valutare le prestazioni del sistema di controllo.

Si tracci il diagramma di Bode della funzione d'anello $L(s) = R(s)G(s) = K_P G(s)$

$$L(s) = \frac{20}{(1+s)}$$



(a) Asintotica stabilità.

Dal diagramma di Bode si ricava un valore della pulsazione $\omega_c \cong 20.0$ rad/s ed un valore del margine di fase $j_m \cong 93^\circ$.

Poiché la funzione d'anello $L(s)$ non ha poli con parte reale maggiore di zero ed attraversa una sola volta l'asse 0 dB è applicabile il criterio di Bode. Il sistema retroazionato risulta asintoticamente stabile in quanto il guadagno d'anello $m_L = 20 > 0$ ed il margine di fase $j_m = 93^\circ > 0^\circ$.

(b) Tempo di assestamento in risposta ad un riferimento w a scalino.

Dato che $\angle j_m \gg 75^\circ$, la funzione di trasferimento tra riferimento ed uscita del sistema retroazionato può essere approssimata con un sistema del primo ordine con un solo polo reale. La pulsazione critica w_c rappresenta allora una stima dell'inverso della costante di tempo del polo dominante $T \cong \frac{1}{w_c} = 0.05$. Il tempo di assestamento sarà quindi

$$t_a \cong 5T = 0.25 \text{ s}$$

(c) Valore di regime dell'uscita y in risposta ad un riferimento w a scalino

La funzione di trasferimento tra riferimento ed uscita vale $F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$, per cui dal teorema del valore finale si ottiene (ricordando che il tipo della funzione d'anello è $g = 0$)

$$y_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{L(s)}{1 + L(s)} \frac{1}{s} = \frac{m_L}{1 + m_L} = \frac{20}{21}$$

(d) Capacità di attenuare l'effetto del disturbo $d(t) = \cos(0.5t)$

La funzione di trasferimento tra disturbo ed uscita vale $S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$, quindi, detta $y_d(t)$ la risposta al disturbo, applicando il teorema della risposta in frequenza si ottiene, ricordando che $\cos(0.5t) = \sin\left(0.5t + \frac{p}{2}\right)$

$$y_d(t) = |S(j0.5)| \sin\left(0.5t + \frac{p}{2} + \angle S(j0.5)\right)$$

Per valutare la capacità del sistema di attenuare il disturbo è sufficiente valutare

$$|S(j0.5)| = \left| \frac{1}{1 + L(j0.5)} \right| = 0.0532 \cong -25.5 \text{ dB}$$

Una soluzione alternativa consiste nel dedurre approssimativamente l'attenuazione a partire dal diagramma di Bode. Per $w < w_c$, $|S(jw)|$ può anche essere approssimato con $\left| \frac{1}{L(jw)} \right| = -|L(jw)|$, ottenendo un'attenuazione pari a circa -25 dB .

(e) Capacità di tollerare un eventuale ritardo aggiuntivo $t = 0.6$ lungo l'anello senza perdere la stabilità

Lo sfasamento negativo aggiuntivo in corrispondenza della pulsazione critica vale

$$-w_c t \frac{180}{p} \cong -688^\circ, \text{ dunque il margine di fase diventa}$$

$$\angle j_m = 93^\circ - 688^\circ = -595^\circ$$

Poiché il margine di fase è negativo il sistema retroazionato non è stabile (criterio di Bode). Questo risultato è confermato dal fatto che il massimo ritardo tollerato nell'anello vale

$$t_{\max} = \frac{p \cdot \angle j_m}{180 w_c} \cong 0.081 \text{ s} < 0.6 \text{ s}$$