

Fondamenti di automatica – Laurea on Line
Prova di recupero PR03 - 17 febbraio 2003 – A.A. 2002/03
Traccia della soluzione

Si consideri il sistema dinamico a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\Sigma : \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} -1.5 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad -0.5]$$

1) Determinare lo stato e l'uscita di equilibrio corrispondenti all'ingresso $\bar{u} = 20$.

Per un sistema a tempo discreto soggetto ad un ingresso costante $u(k) = \bar{u}$, gli stati di equilibrio sono le soluzioni \bar{x} costanti del sistema $\bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u}$

$$\bar{x} = (I - A)^{-1} B \bar{u} = \begin{bmatrix} 2.5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u} = \begin{bmatrix} 2/17 & 4/17 \\ -6/17 & 5/17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u} = \begin{bmatrix} 0.1176 \\ -0.3529 \end{bmatrix} 20 = \begin{bmatrix} 2.353 \\ -7.059 \end{bmatrix}$$

a cui corrisponde l'uscita di equilibrio

$$\bar{y} = C \bar{x} = [1 \quad -0.5] \begin{bmatrix} 2.353 \\ -7.059 \end{bmatrix} = 5.882$$

2) Studiare la stabilità del sistema Σ .

Le proprietà di stabilità per un sistema a tempo discreto dipendono dal modulo degli autovalori della matrice A . Il polinomio caratteristico di A è dato da

$$j(z) = \det(zI - A) = \det \begin{bmatrix} z + 1.5 & -2 \\ 3 & z \end{bmatrix} = z^2 + 1.5z + 6$$

per cui i corrispondenti autovalori risultano

$$z_1 = -0.75 + j 2.33 \quad z_2 = -0.75 - j 2.33$$

Poiché $|z_1| > 1$ e $|z_2| > 1$ il sistema Σ risulta instabile

3) Calcolare la funzione di trasferimento tra $u(k)$ e $y(k)$.

Per il calcolo della funzione di trasferimento applichiamo la definizione

$$\begin{aligned} G(z) &= C(zI - A)^{-1}B = [1 \quad -0.5] \begin{bmatrix} z + 1.5 & -2 \\ 3 & z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{z^2 + 1.5z + 6} [1 \quad -0.5] \begin{bmatrix} z & 2 \\ -3 & z + 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{z + 1.5}{z^2 + 1.5z + 6} \end{aligned}$$

4) Ricavare la matrice dinamica del sistema in anello chiuso ottenuto applicando la retroazione $u(k) = r y(k)$, dove r è un parametro reale.

Applicando la retroazione proposta si ottiene

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) = Ax(k) + Br y(k) = Ax(k) + r BCx(k) = (A + r BC)x(k) = \tilde{A}x(k)$$

La matrice dinamica del sistema in anello chiuso sarà

$$\tilde{A} = A + r BC = \begin{bmatrix} -1.5 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \quad -0.5] = \begin{bmatrix} -1.5 + r & 2 - 0.5r \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Al variare del parametro r è possibile modificare la posizione degli autovalori, stabilizzando il sistema (quando vale $10/3 < r < 17/5$).