

Fondamenti di automatica – Laurea on Line
Prova di recupero PR01 - 17 febbraio 2003 – A.A. 2002/03
Traccia della soluzione

Si consideri il sistema descritto dallo schema a blocchi di Fig. 1, dove i due sottosistemi Σ_1 e Σ_2 sono così definiti:

$$\Sigma_1: \dot{w}(t) = -0.5w(t) - 3u(t)$$

$$\Sigma_2: \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{10}{s^2 + 4s + 16}$$

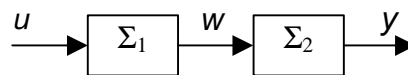


Fig. 1

- 1) Determinare i valori di equilibrio delle variabili w e y quando l'ingresso u è costante.

Supponendo di applicare l'ingresso costante \bar{u} il valore di equilibrio per w è quello che risolve l'equazione

$$0 = -0.5\bar{w} - 3\bar{u} \quad \text{ovvero} \quad \bar{w} = -6\bar{u}$$

Detto $\underline{m}_2 = G_2(0) = 0.625$ il guadagno della funzione $G_2(0)$ tra w e y , all'equilibrio

$$\bar{y} = \underline{m}_2 \bar{w} = 0.625\bar{w}$$

Dallo schema a blocchi si ottiene anche $\bar{y} = 0.625\bar{w} = -3.75\bar{u}$

- 2) Calcolare la funzione di trasferimento complessiva tra u e y .

La funzione di trasferimento $G_1(s)$ tra u e w vale

$$G_1(s) = -\frac{3}{s + 0.5}$$

I due sistemi sono in cascata, quindi la funzione di trasferimento complessiva è

$$\begin{aligned} G(s) = G_1(s)G_2(s) &= -\frac{3}{s + 0.5} \frac{10}{s^2 + 4s + 16} = -\frac{30}{(s + 0.5)(s^2 + 4s + 16)} = \\ &= -\frac{3.75}{(1 + 2s)(1 + 0.25s + 0.0625s^2)} \end{aligned}$$

- 3) Valutare, anche approssimativamente, le principali caratteristiche del movimento di $y(t)$ in risposta ad uno scalino unitario di $u(t)$.

Il sistema è asintoticamente stabile perché non si è verificata alcuna cancellazione tra poli e zeri instabili e tutti i poli hanno parte reale negativa:

$$\begin{cases} s_1 = -0.5 \\ s_2 = -2 - j 3.46 \\ s_3 = -2 - j 3.46 \end{cases}$$

Per valutare in maniera approssimativa le principali caratteristiche della risposta a scalino è possibile effettuare un'approssimazione a poli dominanti della funzione di trasferimento data. La funzione di trasferimento approssimante viene costruita come quella di un sistema che possiede solo i poli dominanti (cioè quelli più vicini all'asse reale) e con un guadagno pari a quello del sistema di partenza.

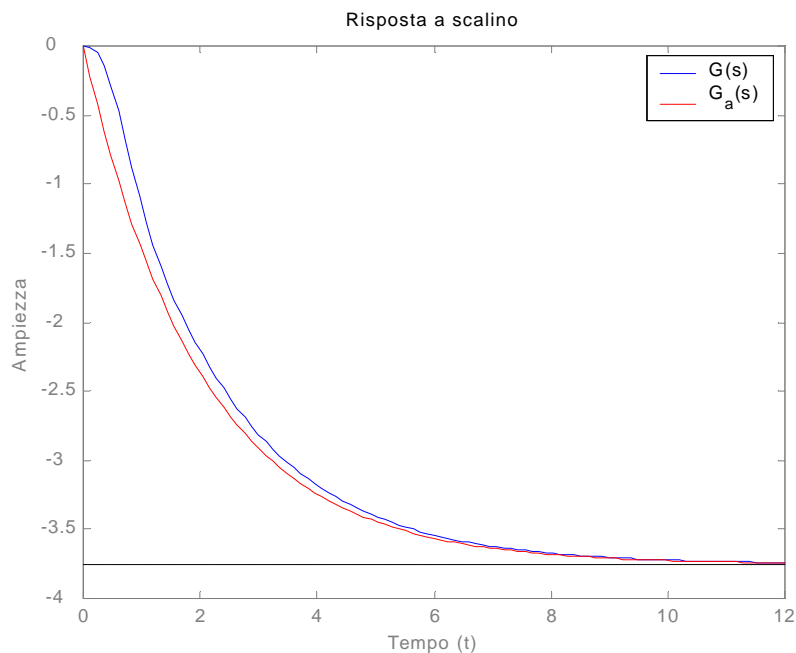
In questo caso il polo dominante è quello reale, e per conservare il guadagno, che per il sistema originale vale $G(0) = -30/8 = -3.75$, si ottiene

$$G_a(s) = -\frac{3.75}{1 + 2s}$$

La risposta allo scalino del sistema quindi tenderà asintoticamente al valore -3.75 del guadagno, senza alcuna oscillazione (perché il polo dominante è reale). Il tempo di assestamento dipende dalla costante di tempo del polo dominante $T = 2$, e vale

$$t_a \cong 5T = 10 \text{ s}$$

Si può valutare la bontà dell'approssimazione confrontando le risposte a scalino ottenute per il sistema originale e per il sistema approssimato. La principale differenza risiede nel tratto iniziale della risposta dove, per effetto del diverso grado relativo delle funzioni, il sistema originale presenta una derivata nulla, mentre il sistema approssimato presenta una derivata non nulla.



4) Dire quante sono le variabili di stato necessarie in una possibile rappresentazione di stato del sistema.

Una rappresentazione di stato del sistema complessivo richiede un numero di variabili pari alla somma del numero di variabili di stato dei due sottosistemi. Il sistema Σ_1 è già rappresentato in forma di stato e richiede una sola variabile. Il sistema Σ_2 richiede invece un numero di variabili di stato pari al numero dei poli, cioè due. Complessivamente quindi sono necessarie tre variabili di stato.