

**Fondamenti di automatica – Laurea on Line**  
**Prova di recupero PR02 - 17 febbraio 2003 – A.A. 2002/03**  
**Traccia della soluzione**

Si consideri il sistema di controllo in anello chiuso di Fig. 1, dove il sistema da controllare è descritto dalla funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{5}{(1+s)}$  mentre il regolatore  $R(s)$  è un controllore ad azione puramente proporzionale con guadagno  $K_P = 4$ .

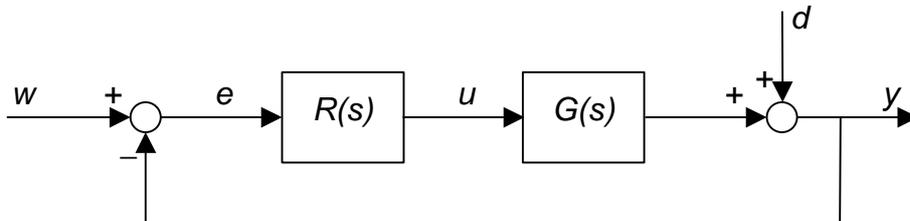
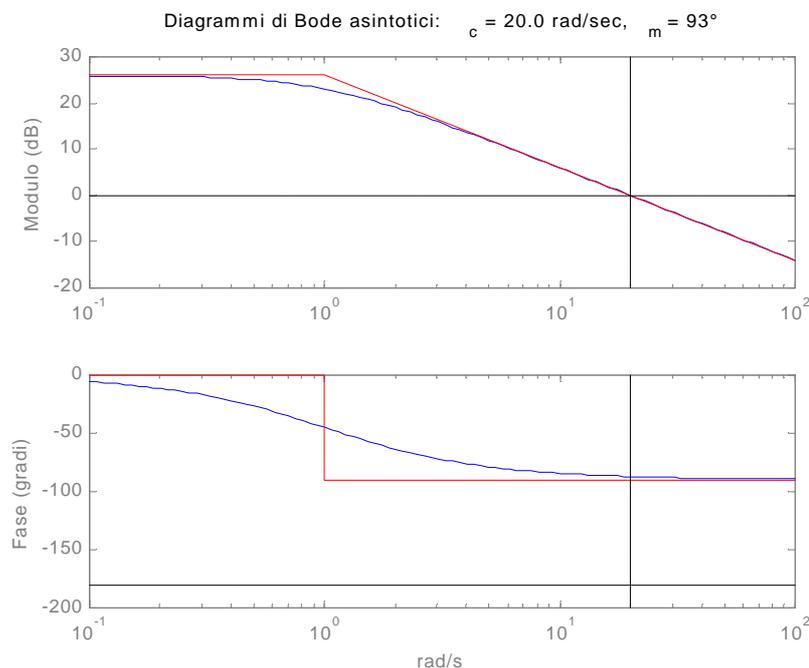


Fig. 1

Valutare le prestazioni del sistema di controllo.

Si tracci il diagramma di Bode della funzione d'anello  $L(s) = R(s)G(s) = K_P G(s)$

$$L(s) = \frac{20}{(1+s)}$$



(a) Asintotica stabilità.

Dal diagramma di Bode si ricava un valore della pulsazione  $\omega_c \cong 20.0$  rad/s ed un valore del margine di fase  $j_m \cong 93^\circ$ .

Poiché la funzione d'anello  $L(s)$  non ha poli con parte reale maggiore di zero ed attraversa una sola volta l'asse 0 dB è applicabile il criterio di Bode. Il sistema retroazionato risulta asintoticamente stabile in quanto il guadagno d'anello  $m_L = 20 > 0$  ed il margine di fase  $j_m = 93^\circ > 0^\circ$ .

(b) Tempo di assestamento in risposta ad un riferimento  $w$  a scalino.

Dato che  $\mathbf{j}_m \gg 75^\circ$ , la funzione di trasferimento tra riferimento ed uscita del sistema retroazionato può essere approssimata con un sistema del primo ordine con un solo polo reale. La pulsazione critica  $\mathbf{w}_c$  rappresenta allora una stima dell'inverso della costante di tempo del polo dominante  $T \cong \frac{1}{\mathbf{w}_c} = 0.05$ . Il tempo di assestamento sarà quindi

$$t_a \cong 5T = 0.25 \text{ s}$$

(c) Valore di regime dell'uscita  $y$  in risposta ad un riferimento  $w$  a scalino

La funzione di trasferimento tra riferimento ed uscita vale  $F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$ , per cui dal teorema del valore finale si ottiene (ricordando che il tipo della funzione d'anello è  $g = 0$ )

$$y_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{L(s)}{1 + L(s)} \frac{1}{s} = \frac{\mathbf{m}_L}{1 + \mathbf{m}_L} = \frac{20}{21}$$

(d) Capacità di attenuare l'effetto del disturbo  $d(t) = \cos(0.5t)$

La funzione di trasferimento tra disturbo ed uscita vale  $S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$ , quindi, detta  $y_d(t)$  la risposta al disturbo, applicando il teorema della risposta in frequenza si ottiene, ricordando che  $\cos(0.5t) = \sin\left(0.5t + \frac{\mathbf{p}}{2}\right)$

$$y_d(t) = |S(j0.5)| \sin\left(0.5t + \frac{\mathbf{p}}{2} + \angle S(j0.5)\right)$$

Per valutare la capacità del sistema di attenuare il disturbo è sufficiente valutare

$$|S(j0.5)| = \left| \frac{1}{1 + L(j0.5)} \right| = 0.0532 \cong -25.5 \text{ dB}$$

Una soluzione alternativa consiste nel dedurre approssimativamente l'attenuazione a partire dal diagramma di Bode. Per  $\mathbf{w} < \mathbf{w}_c$ ,  $|S(j\mathbf{w})|$  può anche essere approssimato con  $\left| \frac{1}{L(j\mathbf{w})} \right| = -|L(j\mathbf{w})|$ , ottenendo un'attenuazione pari a circa  $-25 \text{ dB}$ .

(e) Capacità di tollerare un eventuale ritardo aggiuntivo  $t = 0.6$  lungo l'anello senza perdere la stabilità

Lo sfasamento negativo aggiuntivo in corrispondenza della pulsazione critica vale  $-\mathbf{w}_c t \frac{180}{\mathbf{p}} \cong -688^\circ$ , dunque il margine di fase diventa

$$\mathbf{j}_m = 93^\circ - 688^\circ = -595^\circ$$

Poiché il margine di fase è negativo il sistema retroazionato non è stabile (criterio di Bode). Questo risultato è confermato dal fatto che il massimo ritardo tollerato nell'anello vale

$$t_{\max} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{j}_m}{180 \mathbf{w}_c} \cong 0.081 \text{ s} < 0.6 \text{ s}$$