

**Fondamenti di automatica – Laurea on Line**  
**Prova finale del 18/02/02 – traccia della soluzione**

Si debba controllare in anello chiuso il sistema dinamico con ingresso  $u$  e uscita  $y$  descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{5}{1 + 4s}$$

1) Determinare la famiglia di tutte le rappresentazioni di stato del primo ordine del sistema descritto da  $G(s)$ .

Per un sistema del primo ordine la generica rappresentazione di stato è

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = cx(t) + du(t)$$

e la corrispondente funzione di trasferimento è data da

$$G(s) = \frac{cb}{s - a} + d$$

Uguagliando quest'ultima espressione con quella data nel testo si ricavano allora le relazioni

$$d = 0, \quad a = -1/4, \quad cb = 5/4$$

che definiscono compiutamente le infinite rappresentazioni di stato del sistema.

2) Calcolare la risposta del sistema ad uno scalino unitario.

Attraverso la formula di Lagrange o mediante lo sviluppo di Heaviside di  $G(s)/s$  si ricava

$$y(t) = 5(1 - e^{-t/4})$$

3) Valutare l'andamento dell'uscita  $y$  a transitorio esaurito quando l'ingresso è  $u(t) = \sin(0.1t)$ .

Si deve applicare il teorema della risposta in frequenza. Poiché risulta

$$G(j0.1) = \frac{5}{1 + j0.4}$$

$$|G(j0.1)| = \frac{5}{|1 + j0.4|} = \frac{5}{\sqrt{1.16}} \cong 4.64, \quad \arg G(j0.1) = -\arctan(0.4) \cong -0.38$$

l'andamento asintotico dell'uscita è

$$y(t) \cong 4.64 \sin(0.1t - 0.38)$$

4) Progettare un regolatore PI (cioè ad azione proporzionale-integrale) in modo che

- risulti nullo l'errore a regime in presenza di un riferimento costante
- la pulsazione critica sia superiore a 1 rad/s
- il margine di fase sia superiore a  $60^\circ$

Un regolatore PI ha funzione di trasferimento

$$R(s) = K_i \frac{1 + sT_i}{s}$$

Il polo nell'origine è sufficiente a garantire il rispetto della specifica sull'errore a regime. Conviene poi porre  $T_i = 4$  in modo da cancellare il polo di  $G(s)$ . La funzione d'anello diventa allora

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{5K_i}{s}$$

Il corrispondente diagramma del modulo è una retta con pendenza  $-1$  che attraversa l'asse a 0dB in  $\omega = 5K_i$ . Quindi per rispettare il vincolo sulla pulsazione critica basta che sia  $K_i > 1/5$ . Poiché la fase associata a  $L(s)$  è costante e pari a  $-90^\circ$ , il margine di fase risulta in ogni caso uguale a  $\gamma_m = 90^\circ$  e anche la terza specifica è soddisfatta.

5) A progetto ultimato, valutare qual è il massimo ritardo aggiuntivo che il sistema di controllo può tollerare senza perdere la stabilità.

Poiché un ritardo  $t$  lascia inalterato il modulo della funzione d'anello (e quindi anche la pulsazione critica) ma contribuisce alla fase critica con un termine  $-\omega_c t 180/p$ , il massimo ritardo aggiuntivo ammissibile è quello che rende nullo il margine di fase. Pertanto

$$t_{\max} = \frac{\gamma_m}{\omega_c} \frac{p}{180} = \frac{90}{5K_i} \frac{p}{180} = \frac{p}{10K_i}$$

6) Fissato un valore adeguato per il periodo di campionamento, si ricavi una realizzazione digitale del regolatore PI progettato in precedenza, determinando i valori dei parametri  $a_i$  e  $b_i$  nella seguente legge di controllo a tempo discreto:

$$u_k = a_1 u_{k-1} + b_0 e_k + b_1 e_{k-1}$$

Il periodo di campionamento  $T$  va scelto in modo da soddisfare i vincoli

$$5\omega_c < \frac{2p}{T} < 50\omega_c$$

Usando poi ad esempio il metodo di Tustin, la funzione di trasferimento del regolatore digitale è

$$R^*(z) = K_i \frac{1 + \frac{2T_i}{T} \frac{z-1}{z+1}}{\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} = K_i \frac{\frac{T}{2}(z+1) + T_i(z-1)}{z-1} = \frac{K_i(T/2 + T_i)z + K_i(T/2 - T_i)}{z-1}$$

Uguagliando infine tale espressione con la funzione di trasferimento

$$R^*(z) = \frac{b_0 z + b_1}{z - a_1}$$

associata alla legge di controllo data nel testo, si ottiene

$$a_1 = 1 \quad , \quad b_0 = K_i(T/2 + T_i) \quad , \quad b_1 = K_i(T/2 - T_i)$$

Naturalmente si sarebbe potuto adottare un altro metodo di discretizzazione (Eulero in avanti, Eulero indietro, ...) arrivando a risultati diversi.