Controllo proporzionale vs controllo proporzionale-integrale

Si consideri il sistema di controllo di Fig. 1 dove il controllore $R(s)$ è un semplice guadagno μ.

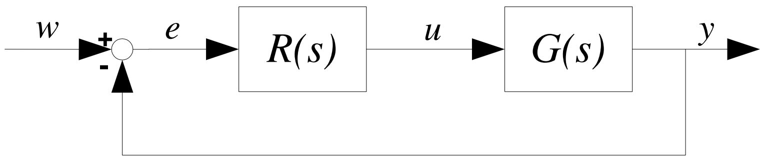


Figura 1: Il sistema di controllo

Sia $G(s)$ una generica funzione di trasferimento senza singolarità nell'origine, assumiamo per esempio

$$G(s) = \frac{1}{(1+10s)^3}$$

1 Controllo proporzionale

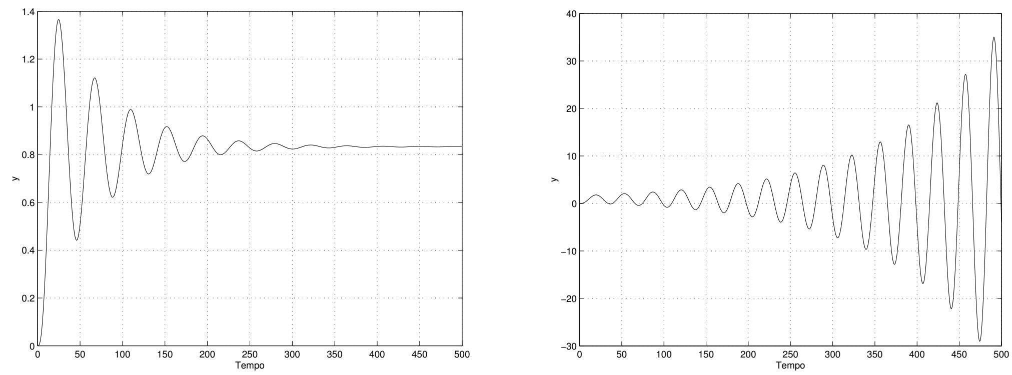
Problema: *determinare $R(s) = \mu$ in modo che il sistema ad anello chiuso sia asintoticamente stabile e si abbia errore $e(t)$ nullo a transitorio esaurito per ingressi $w(t)$ a scalino.*

Si analizzi innanzitutto l'espressione dell'errore $e(t)$ a transitorio esaurito per ingressi $w(t)$ a scalino. Dall'applicazione del teorema del valore finale si ricava

$$\|e_\infty\| = \lim_{t\to\infty} \|e(t)\| = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+\|L(s)\|} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1+\|\mu\|}$$

dove $L(s) = R(s)G(s)$ è la funzione d'anello.
Non esiste quindi un valore finito di μ che garantisca errore $e(t)$ nullo a transitorio esaurito, ma si può soltanto affermare che $e_\infty \to 0$ quando $\mu \to \infty$.

Si considerino due valori di μ pari rispettivamente a 5 e 10.
Per $\mu = 5$ $\|e_\infty\| \approx 0.1667$ e la risposta del sistema controllato ad uno scalino unitario sul riferimento è mostrata in Fig. 2.a.
Per $\mu = 10$ $\|e_\infty\| \approx 0.0909$ e la risposta del sistema controllato ad uno scalino unitario sul riferimento è mostrata in Fig. 2.b.



(a) $\mu = 5$ (b) $\mu = 10$

Figura 2: Risposte allo scalino con regolatore proporzionale

La simulazione permette di verificare l'errore residuo a transitorio esaurito precedentemente calcolato mediante il teorema del valore finale. Inoltre essa rivela che per guadagni $\mu > \bar{\mu}$ con $5 < \bar{\mu} < 10$ il sistema ad anello chiuso non è asintoticamente stabile.

Dall'analisi del diagramma di Nyquist (Fig. 3) si nota infatti che il sistema ad anello chiuso con $R(s) = \mu = 1$ è asintoticamente stabile ma non ha margine di guadagno infinito, i.e. esiste un guadagno $\bar{\mu}$ tale che $\forall \mu : \mu > \bar{\mu}$ il diagramma di Nyquist compie un numero di giri non nullo intorno al punto -1, risultando il sistema ad anello chiuso instabile.
Dalla coppia di equazioni

$$\begin{aligned} \bar{\omega} : \angle L(j\bar{\omega}) &= -180^\circ \\ \bar{\mu}\|L(j\bar{\omega})\| &= 1 \end{aligned}$$

si ricava il margine di guadagno $\bar{\mu} \approx 8.1$.
Si osservi la Fig. 4 ad ulteriore riprova che il sistema ad anello chiuso è stabile per $\mu = 5 < \bar{\mu}$ (Fig. 4.a) mentre non lo è per $\mu = 10 > \bar{\mu}$ (Fig. 4.b).

Si conclude, quindi, che non è in generale possibile trovare un valore finito di μ che permetta di ottenere errore nullo a transitorio esaurito per variazioni a scalino del disturbo. Inoltre per alcuni sistemi la scelta di un valore di μ troppo elevato compromette la stabilità del sistema ad anello chiuso.

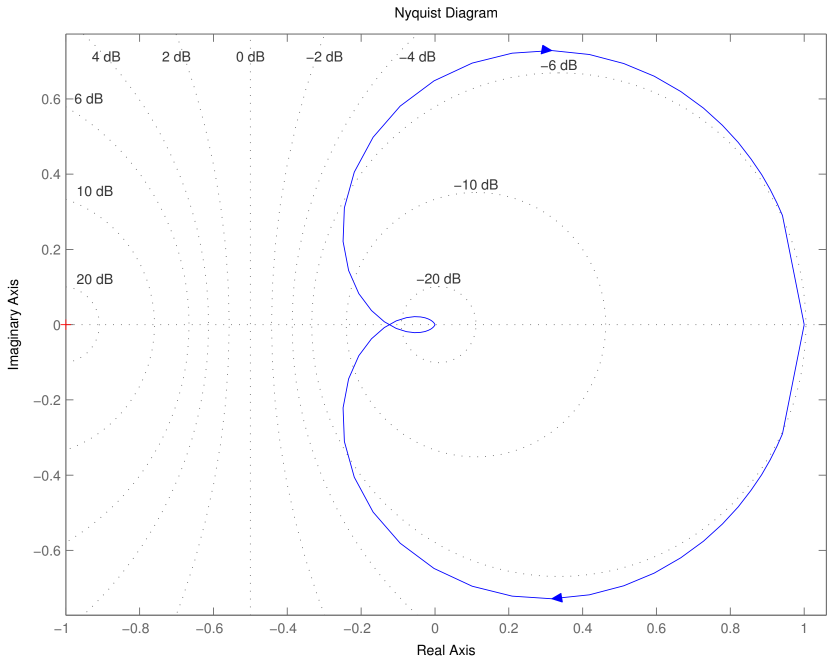
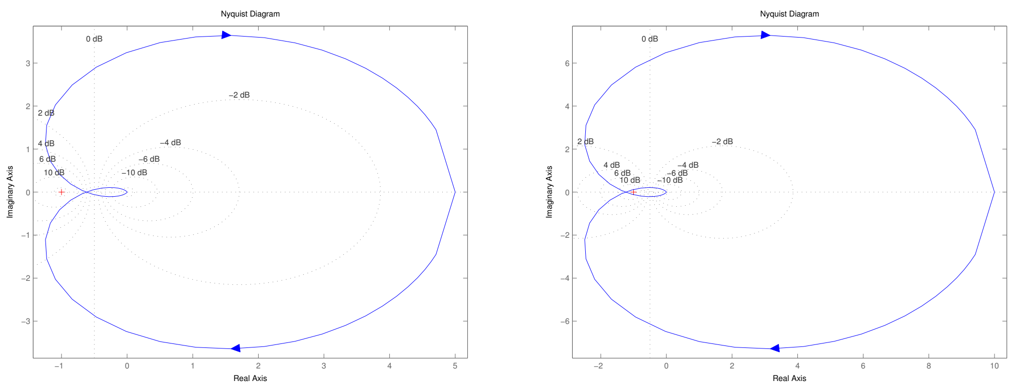


Figura 3: Diagramma di Nyquist di $L(s)$ (con $R(s) = 1$)



(a) $\mu = 5$ (b) $\mu = 10$

Figura 4: Diagramma di Nyquist di $L(s)$ (con $R(s) = \mu$)

2 Controllo proporzionale-integrale

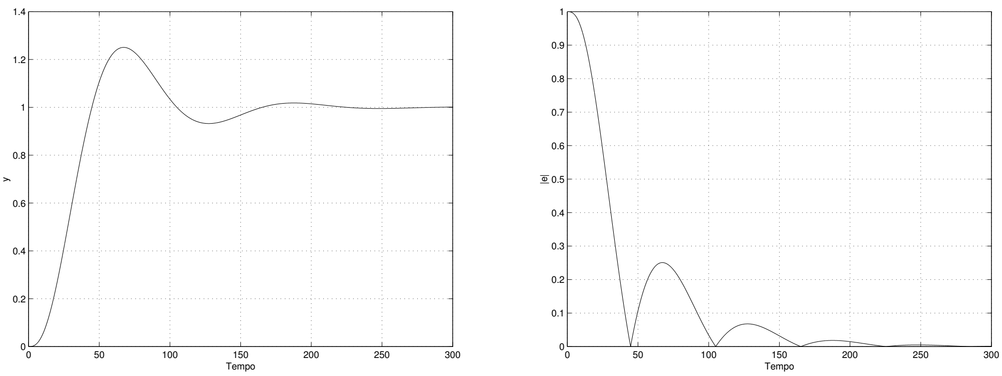
Problema: *determinare* $R(s) = \mu\frac{1+s\tau}{s}$ *in modo che il sistema ad anello chiuso sia asintoticamente stabile e si abbia errore* $e(t)$ *nullo a transitorio esaurito per ingressi* $w(t)$ *a scalino.*

Si analizzi innanzitutto l'espressione dell'errore $e(t)$ a transitorio esaurito per ingressi $w(t)$ a scalino. Dall'applicazione del teorema del valore finale si ricava

$$\|e_\infty\| = \lim_{t\to\infty}\|e(t)\| = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{1+\|L(s)\|}\cdot\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{s}{s+\mu} = 0$$

dove $L(s) = R(s)G(s)$ è la funzione d'anello.
In questo caso, quindi, la presenza dell'integratore nel regolatore permette di ottenere errore nullo a transitorio esaurito per variazioni a scalino del riferimento.

Si confrontino inoltre tali risultati con le simulazioni di Fig. 5 in cui è mostrata la risposta del sistema ad uno scalino del riferimento ed il modulo dell'errore $\|e(t)\| = \|y(t) - w(t)\|$. Si consideri, infine, il sistema di controllo



(a) $y(t)$ (b) $\|e(t)\|$

Figura 5: Risposta allo scalino con controllore proporzionale-integrale

mostrato in Fig. 1 nelle condizioni di regime. Dalla richiesta di avere errore nullo a transitorio esaurito si ricava che a regime dovrà valere $\bar{w} = \bar{y}$ (dove $\bar{w}$ e $\bar{y}$ rappresentano i valori di regime dei segnali $w(t)$ e $y(t)$), i.e. $\bar{e} = 0$. Sia poi

$$G(s) = \mu\frac{\prod_i(1+s\tau_i)}{\prod_j(1+sT_j)}$$

allora a regime varrà $\bar{y} = \mu\bar{u}$.
E per quanto affermato precedentemente poichè $\bar{w} \neq 0$, dovrà essere $\bar{u} \neq 0$. Il controllore deve quindi essere capace di generare, a regime, un'uscita costante non nulla a fronte di ingresso nullo. Un sistema capace di fare ciò è l'integratore.

Si conclude quindi che, affinchè si possa avere errore nullo a transitorio esaurito per riferimenti a scalino, è necessario che il controllore sia un sistema in grado di generare, a regime, un'uscita a scalino quando l'ingresso è nullo.

Tale risultato si può generalizzare nel seguente: per avere errore nullo a transitorio esaurito in presenza di un segnale di riferimento $w(t)$ è necessario che nel controllore sia presente un sistema capace di generare, a regime, il medesimo segnale avendo ingresso nullo.