Allevamento di bestiame

Analisi e controllo di un modello discreto

Allevamento di bestiame

- **La mandria è composta da animali appartenenti a tre classi di età**
  - **Giovani** animali con età compresa tra 0 e 1 anno
  - **Adulti** animali con età compresa tra 1 e 2 anni
  - **Vecchi** animali con età superiore a 2 anni

- **Dinamica della popolazione**
  - **I giovani non si riproducono**
  - **Ogni adulto produce 0.8 animali all’anno**
  - **Ogni vecchio produce 0.4 animali all’anno**
  - **Il tasso di mortalità annuo dei vecchi è pari a 0.3 (e solo loro muoiono)**

- **Ogni anno**
  - **Viene venduta una parte di vecchi (in relazione alle esigenze di mercato)**
  - **Viene acquistato un certo numero di giovani (in relazione alle necessità)**

Problema

- **Costruire un modello in variabili di stato**

- **Analizzare la stabilità del sistema**

- **Trovare il punto di equilibrio corrispondente a**
  - **Popolazione totale dell'allevamento 500**
  - **Giovani acquistati 0**

- **Calcolare la funzione di trasferimento del sistema**

- **Progettare una legge di controllo che garantisca l'asintotica stabilità del sistema**

Modello in variabili di stato (1)

- Variabili di stato
  - $x_1(k)$ numero di giovani all'inizio dell'anno k
  - $x_2(k)$ numero di adulti all'inizio dell'anno k
  - $x_3(k)$ numero di vecchi all'inizio dell'anno k

- Variabili d'ingresso
  - $u_1(k)$ numero di vecchi venduti durante l'anno k
  - $u_2(k)$ numero di giovani acquistati durante l'anno k

- Variabile d'uscita
  - $y(k)$ numero totale di animali alla fine dell'anno k

Modello in variabili di stato (2)

- **Equazioni di stato**

$$x_1(k+1) = \underbrace{0.8x_2(k)}_{\text{riproduzione adulti}} + \underbrace{0.4x_3(k)}_{\text{riproduzione vecchi}} + \underbrace{u_2(k)}_{\text{acquisto giovani}}$$

$$x_2(k+1) = \underbrace{x_1(k)}_{\text{giovani nell'anno } k}$$

$$x_3(k+1) = \underbrace{x_2(k)}_{\text{adulti nell'anno } k} + \underbrace{(1-0.3)x_3(k)}_{\text{vecchi nell'anno } k} - \underbrace{u_1(k)}_{\text{vendita vecchi}}$$

- **Equazione d'uscita**

$$\begin{aligned} y(k) = {} & \underbrace{x_1(k)}_{\text{giovani nell'anno } k} + \underbrace{x_2(k)}_{\text{adulti nell'anno } k} + \underbrace{x_3(k)}_{\text{vecchi nell'anno } k} + \\ & + \underbrace{0.8x_2(k) + 0.4x_3(k)}_{\text{nati nell'anno } k} - \underbrace{0.3x_3(k)}_{\text{morti nell'anno } k} + \\ & - \underbrace{u_1(k)}_{\text{vendita vecchi}} + \underbrace{u_2(k)}_{\text{acquisto giovani}} \end{aligned}$$

Modello in variabili di stato (3)

- Il modello dinamico della popolazione della mandria risulta

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0.8x_2(k) + 0.4x_3(k) + u_2(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) \\ x_3(k+1) = x_2(k) + 0.7x_3(k) - u_1(k) \\ \qquad\quad y(k) = x_1(k) + 1.8x_2(k) + 1.1x_3(k) - u_1(k) + u_2(k) \end{cases}$$

- In forma matriciale

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ \qquad y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 & 0.4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1.8 & 1.1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Stabilità

- **Calcolo del polinomio caratteristico della matrice A**

$$\varphi(\lambda) = det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -0.8 & -0.4 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda - 0.7 \end{bmatrix} =$$
$$= \lambda^2(\lambda - 0.7) - 0.4 - 0.8(\lambda - 0.7) =$$
$$= \lambda^3 - 0.7\lambda^2 - 0.8\lambda + 0.16$$

- **La condizione necessaria per l'asintotica stabilità $\varphi_0\varphi(1) > 0$ non è verificata**

$$\varphi_0\varphi(1) = 1(1 - 0.7 - 0.8 + 0.16) = -0.34 < 0$$

per cui il sistema è instabile

- **Alternativamente, calcolando gli autovalori**

$$\lambda_1 = -0.7199 \qquad \lambda_2 = 0.1791 \qquad \underbrace{\lambda_3 = 1.2408}_{|\lambda_3|>1}$$

Equilibrio (1)

- **Lo** **stato di equilibrio** **associato all'ingresso** $u(k) = \bar{u}$ **si ottiene ponendo** $x(k+1) = x(k) = \bar{x}$

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = 0.8\bar{x}_2 + 0.4\bar{x}_3 + \bar{u}_2 \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1 \\ \bar{x}_3 = \bar{x}_2 + 0.7\bar{x}_3 - \bar{u}_1 \\ \bar{y} = \bar{x}_1 + 1.8\bar{x}_2 + 1.1\bar{x}_3 - \bar{u}_1 + \bar{u}_2 \end{cases}$$

- **Procedendo per sostituzione si ricava l'equilibrio corrispondente a** $\bar{u}_2 = 0$ e $\bar{y} = 500$

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = 200 \\ \bar{x}_2 = 200 \\ \bar{x}_3 = 100 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{u}_1 = 170 \\ \bar{u}_2 = 0 \end{cases} \qquad \bar{y} = 500$$

Equilibrio (2)

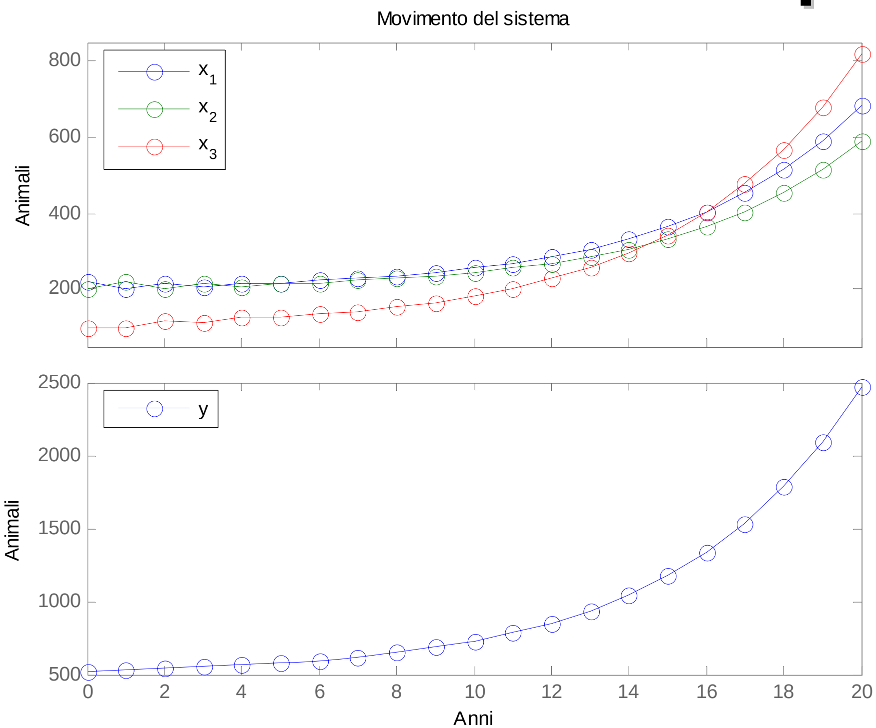
- **Il generico stato di equilibrio si ottiene applicando la definizione**

$$\bar{x} = (I - A)^{-1} B \bar{u} = \begin{bmatrix} 20/17 & -15/17 \\ 20/17 & -15/17 \\ 10/17 & -50/17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y} = \underbrace{(C(I - A)^{-1} B + D)}_{\mu} \bar{u} = [\underbrace{50/17}_{\mu_1} \quad \underbrace{-80/17}_{\mu_2}] \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix}$$

- **Visto che il sistema è instabile, tutti gli stati di equilibrio sono instabili (compreso quello da noi considerato)**
  - **Perturbando lo stato di equilibrio, lo stato del sistema si allontana da questo**
  - **Perturbando l'ingresso di equilibrio, lo stato del sistema si allontana da quello di equilibrio**

Equilibrio (3)

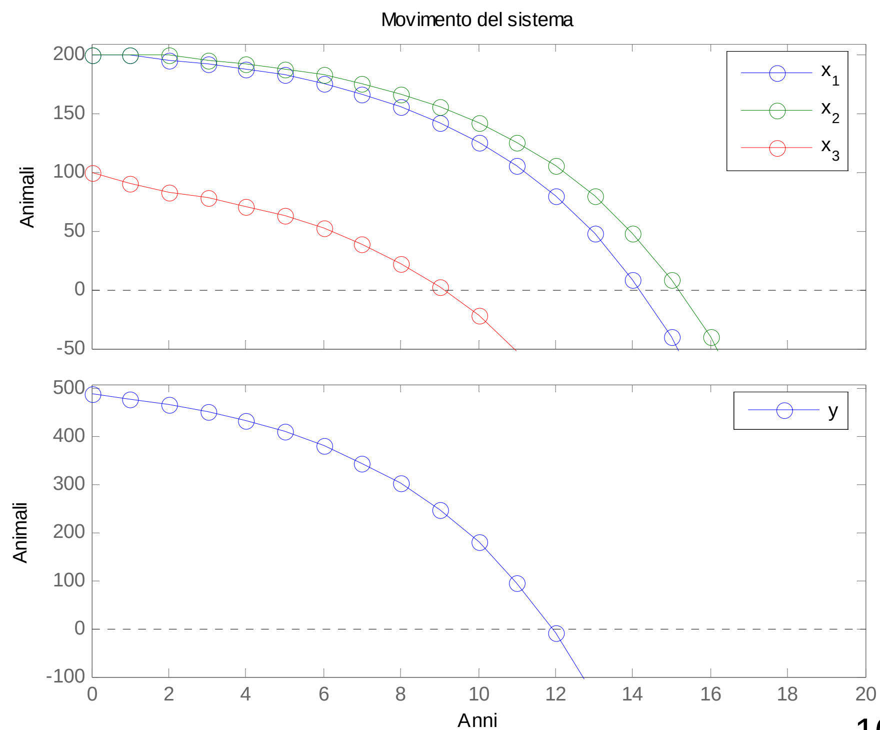


Variazione stato di equilibrio

$$x_0 = \begin{bmatrix} 220 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix} \neq \bar{x} \quad u(k) = \begin{bmatrix} 170 \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{u}$$

Variazione ingresso di equilibrio

$$x_0 = \begin{bmatrix} 200 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix} = \bar{x} \quad u(k) = \begin{bmatrix} 180 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \bar{u}$$



Funzioni di trasferimento (1)

- **La funzione di trasferimento si calcola applicando la definizione**

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

- **Dal momento che il sistema ha più di un ingresso è descritto da una matrice di funzioni di trasferimento**

$$G(z) = \begin{bmatrix} G_1(z) & G_2(z) \end{bmatrix}$$

con

$$G_1(z) = \frac{-z^3 - 0.4z^2 + 0.4z}{z^3 - 0.7z^2 - 0.8z + 0.16}$$

$$G_2(z) = \frac{z^3 + 0.3z^2 + 0.3z}{z^3 - 0.7z^2 - 0.8z + 0.16}$$

Funzioni di trasferimento (2)

- **Analisi della funzione di trasferimento**

$$G_1(z) = \frac{-z^3 - 0.4z^2 + 0.4z}{z^3 - 0.7z^2 - 0.8z + 0.16}$$

  - **Guadagno**

$$\mu_1 = G(1) = \frac{50}{17}$$

  - **Poli (autovalori)**

$$p_1 = -0.7199$$

$$p_2 = 0.1791$$

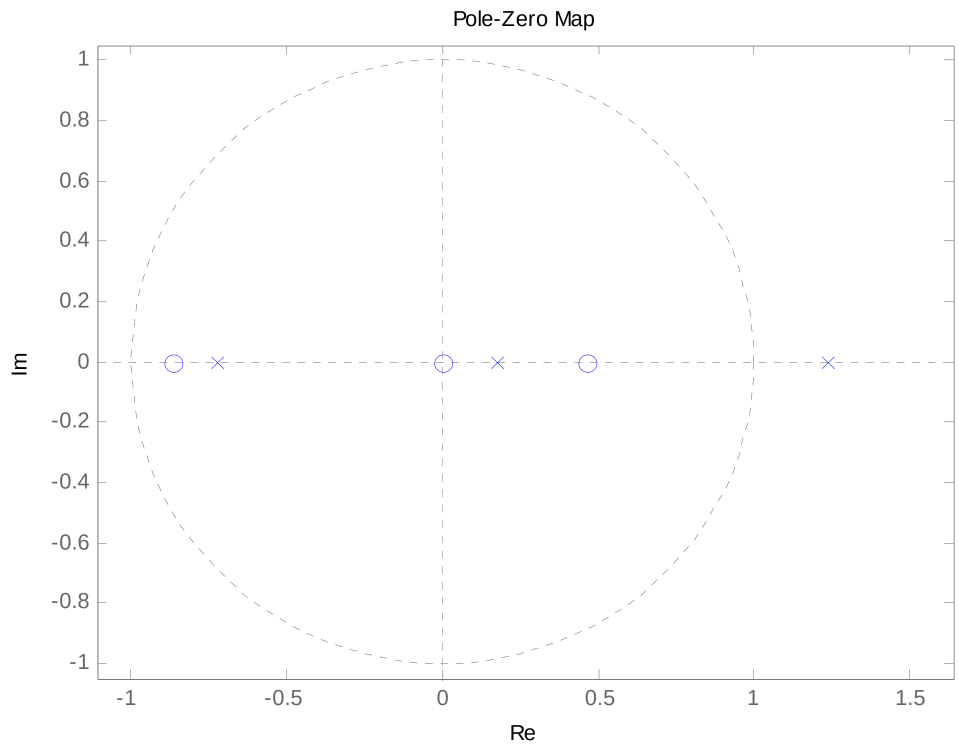
$$p_3 = 1.2408$$

  - **Zeri**

$$z_1 = -0.8633$$

$$z_2 = 0$$

$$z_3 = 0.4633$$



Funzioni di trasferimento (3)

- **Analisi della funzione di trasferimento**

$$G_2(z) = \frac{z^3 + 0.3z^2 + 0.3z}{z^3 - 0.7z^2 - 0.8z + 0.16}$$

  - **Guadagno**

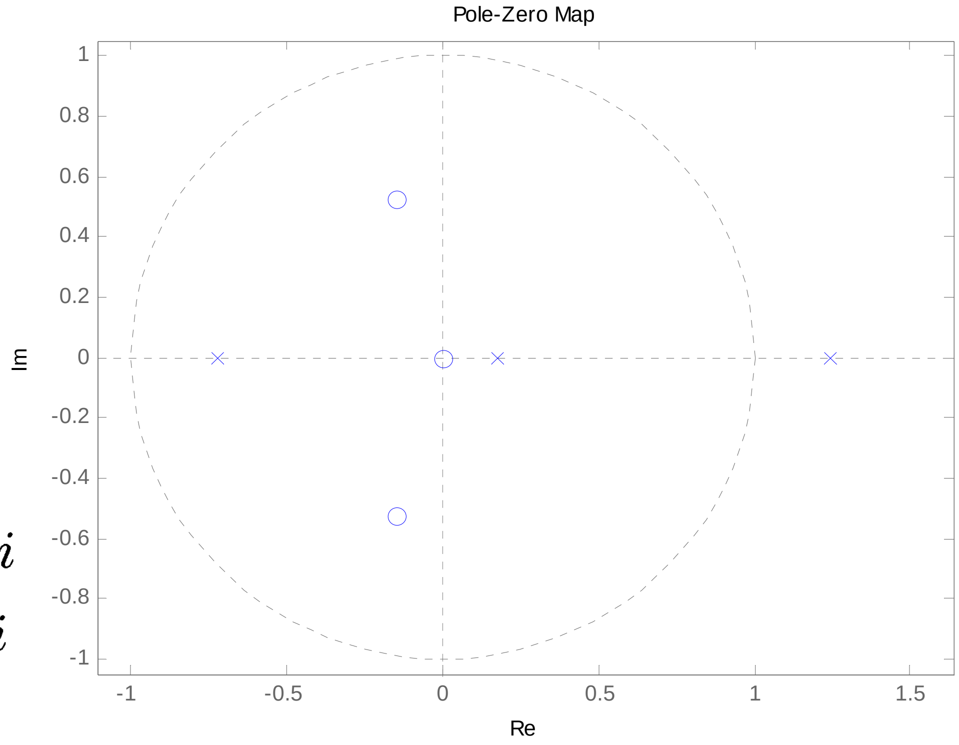
$$\mu_2 = G(1) = -\frac{80}{17}$$

  - **Poli (autovalori)**

$$p_1 = -0.7199$$
$$p_2 = 0.1791$$
$$p_3 = 1.2408$$

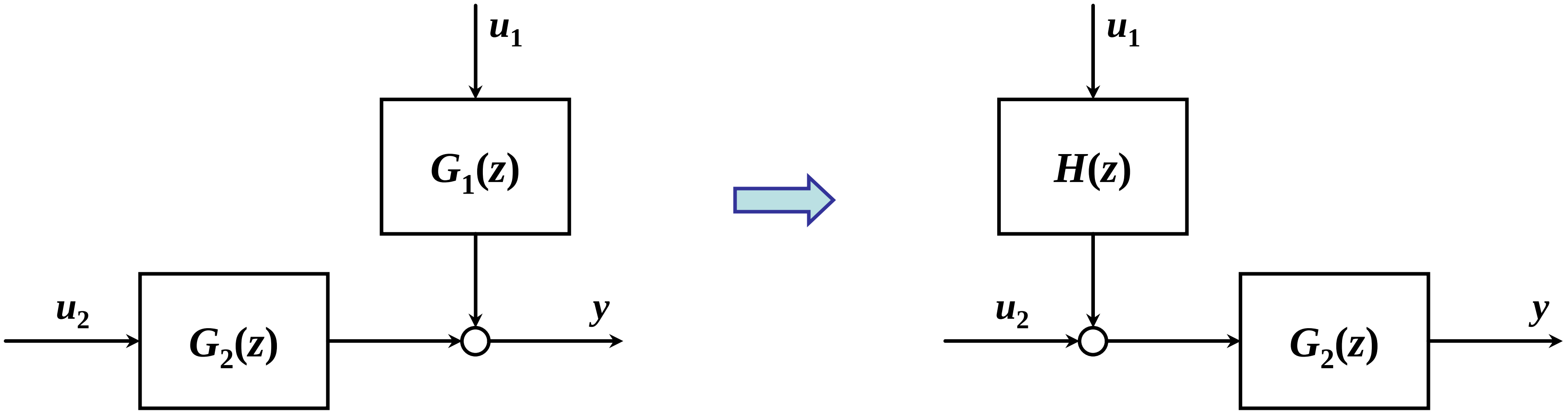
  - **Zeri**

$$z_1 = -0.15 + 0.5268i$$
$$z_2 = -0.15 - 0.5268i$$
$$z_3 = 0$$



Funzioni di trasferimento (4)

- **Con semplici regole di elaborazione degli schemi a blocchi possiamo riformulare il sistema come**



dove

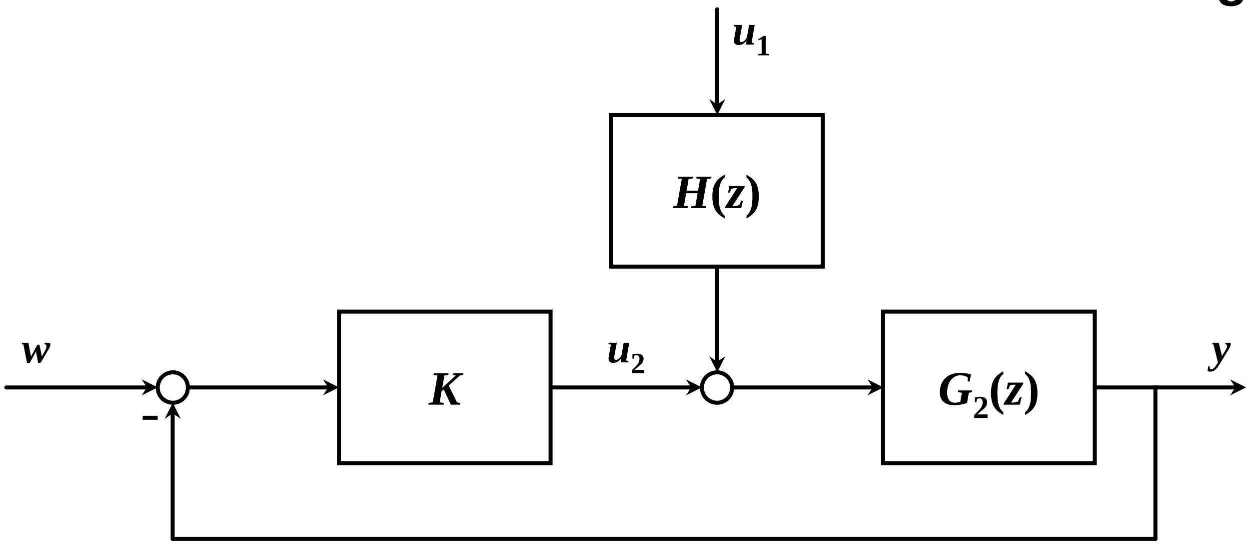
$$H(z) = \frac{G_1(z)}{G_2(z)} = \frac{-z^2 - 0.4z + 0.4}{z^2 + 0.3z + 0.3}$$

- **La funzione di trasferimento $H(z)$ è stabile perché i suoi poli sono gli zeri di $G_2(z)$**

Regolatore (1)

- **Progettare un regolatore di tipo proporzionale che mantenga costante il numero totale di animali, considerando $u_2(k)$ (giovani acquistati) come variabile di controllo e $u_1(k)$ (vecchi venduti) come disturbo non misurabile**

- **Lo schema di controllo a cui facciamo riferimento è il seguente**



  - **Il regolatore deve essere progettato in modo che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile**

Regolatore (2)

- **La funzione d'anello è data da**

$$L(z) = K\,G_2(z) = K\,\frac{z^3 + 0.3z^2 + 0.3z}{z^3 - 0.7z^2 - 0.8z + 0.16}$$

- **Per studiare la stabilità del sistema in anello chiuso consideriamo le radici dell'equazione caratteristica del sistema retroazionato**

$$N_L(z) + D_L(z) = 0$$
$$(K+1)z^3 + (0.3K - 0.7)z^2 + (0.3K - 0.8)z + 0.16 = 0$$

- **Per K = 1 la condizione sufficiente di asintotica stabilità è verificata**

$$\begin{cases} \varphi_0 = K + 1 = 2 \\ \varphi_1 = 0.3K - 0.7 = -0.4 \\ \varphi_2 = 0.3K - 0.8 = -0.5 \\ \varphi_0 = 0.16 = 0.16 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i| < |\varphi_0|$$

Regolatore (3)

- **Utilizzando strumenti di calcolo è possibile raffinare il progetto del regolatore**

- **Per esempio inserendo un integratore nell'anello (polo in $z = 1$) si ottiene un errore nullo a transitorio esaurito**

$$R_2(z) = 10\,\frac{z-0.5}{z-1}$$

- **Ricaviamo infine l'equazione alle differenze per il regolatore $R_2(z)$**

$$\frac{U(z)}{E(z)} = 10\,\frac{z-0.5}{z-1}$$
$$(z-1)U(z) = 10(z-0.5)E(z)$$
$$u(k+1) - u(k) = 10e(k+1) - 5e(k)$$
$$u(k) = u(k-1) + 10e(k) - 5e(k-1)$$

Confronto delle prestazioni dei regolatori

- **Simulazione del sistema**

$$x_0 = \begin{bmatrix} 200 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix} \qquad u_1(k) = 170 + 20\text{sca}(k) \qquad w(k) = \bar{w} = 500$$