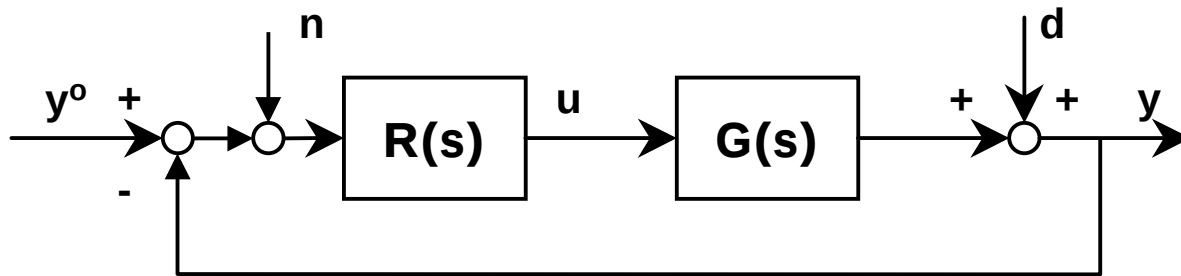


ESEMPIO DI PROGETTO DI UN CONTROLLORE



Specifiche di progetto

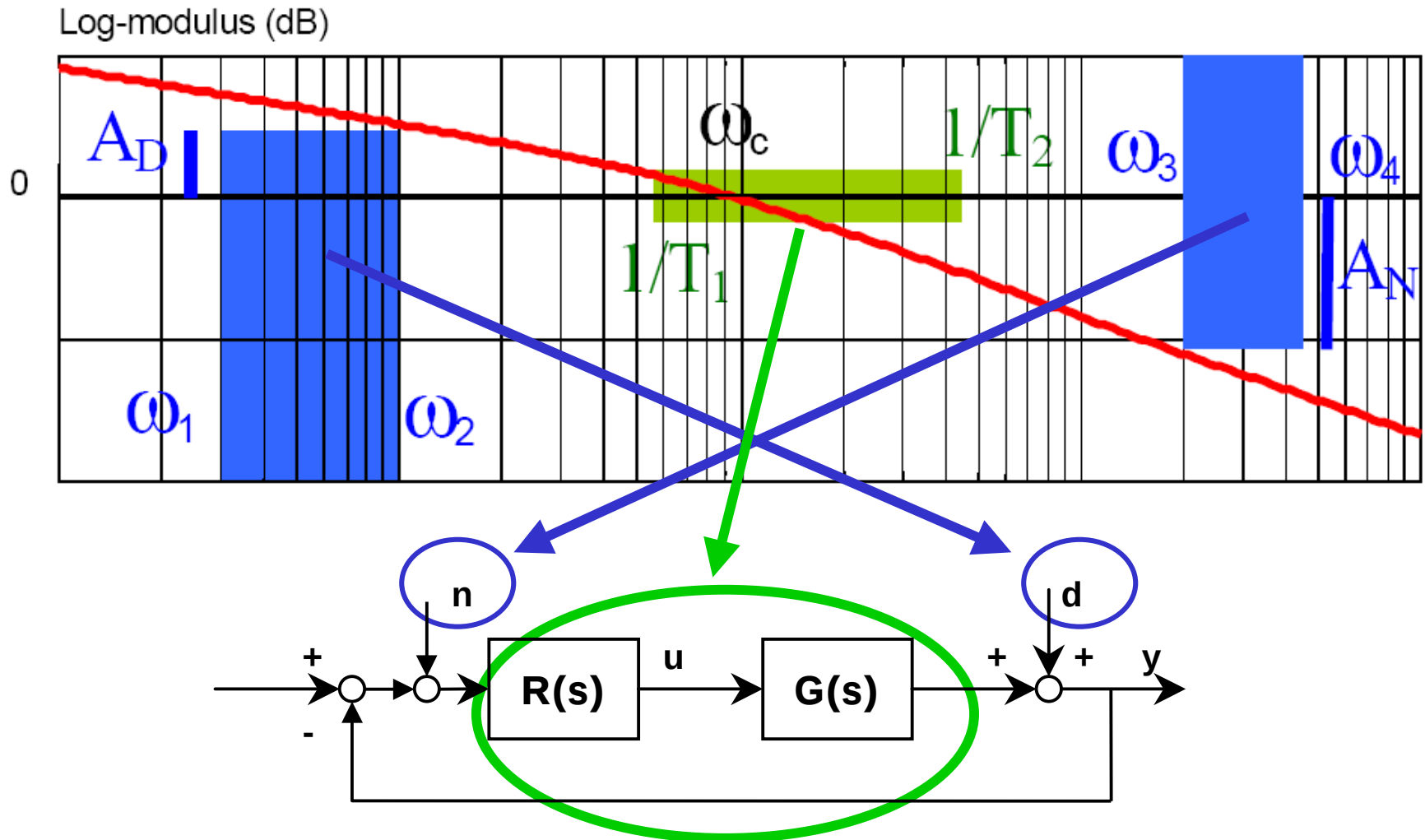
Consideriamo un sistema di controllo in retroazione



Requisiti principali

- Stabilità in condizioni nominali $\longrightarrow$ Bode $\Rightarrow \mu > 0$ e $\phi > 0$
- Stabilità in condizioni perturbate $\longrightarrow$ $k_m \gg 0$ e $\phi \gg 0$
- Precisione statica $\longrightarrow$ aumentare tipo g , guadagno μ
- Inseguimento del set-point $\longrightarrow$ $\omega_c > \bar{\omega}_{cmin}$
- Attenuazione effetto del disturbo d $\longrightarrow$ $|L(j\omega)| \gg 1$
- Attenuazione effetto del disturbo n $\longrightarrow$ $\omega_c < \bar{\omega}_{cmax}$
- Moderazione della variabile di controllo $\longrightarrow$ $|R(j\omega)|$ limitato per $\omega > \omega_c$
- Realizzabilità del regolatore $\longrightarrow$ $-k_L \leq -k_G$

Rappresentazione grafica



Impostazione del progetto

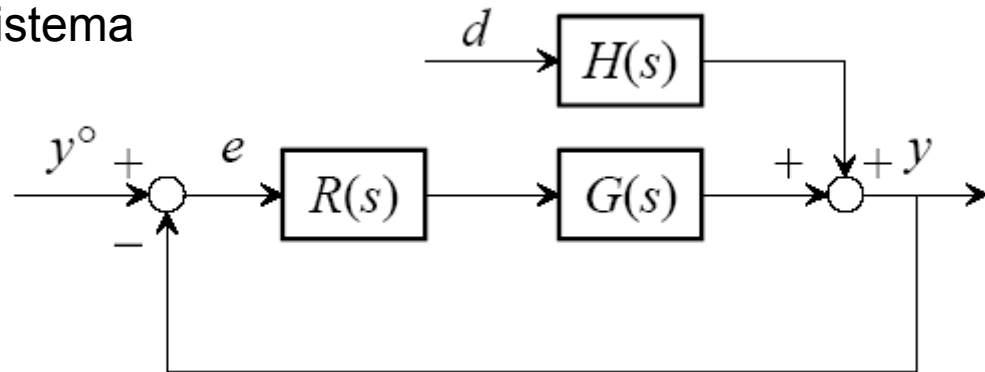
Si fattorizza la funzione di trasferimento del regolatore come segue:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s)$$

- Progetto statico $R_1(s) = \frac{\mu R}{s^r}$
- Progetto dinamico $R_2(s) = \frac{\prod_i (1 + \tau_i s)}{\prod_j (1 + T_j s)}$

Esempio

Si consideri il seguente sistema



dove

$$G(s) = \frac{50}{(1+0.1s)(1+s)(1+10s)} \text{ e } H(s) = \frac{5}{(1+0.01s)}$$

Si vuole progettare il regolatore $R(s)$ in modo tale che:

$$|e_{\infty}| \leq 0.025 \text{ per } y^o(t) = 10sca(t), d(t) = \pm sca(t);$$

$$\omega_c \geq 1 \text{ rad/s}$$

$$\phi_m \geq 60^\circ$$

Progetto statico (1)

Fattorizzata $R(s)$ come $R(s) = R_1(s)R_2(s)$ si deve progettare

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^r}$$

in modo da soddisfare la specifica sull'errore a transitorio esaurito.

Ipotizzando il sistema in anello chiuso asintoticamente stabile e facendo uso, in virtù della linearità del sistema, del principio di sovrapposizione degli effetti, calcoliamo l'errore dovuto al segnale di riferimento

$$\begin{aligned} e_{\infty}^o &= \lim_{s \rightarrow 0} [sE^o(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{1+L(s)} Y^o(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{1 + \frac{50\mu_R}{s^{g_R}}} \frac{10}{s} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10s^{g_R}}{s^{g_R} + 50\mu_R} = \begin{cases} \frac{10}{1+50\mu_R}, & g_R = 0 \\ 0, & g_R \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Progetto statico (2)

Passando all'errore dovuto al disturbo, si ha:

$$e_{d\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} [sE_d(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{-H(s)}{1+L(s)} D(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{-5}{1 + \frac{50\mu_R}{s^{g_R}}} \left(\pm \frac{1}{s} \right) \right] =$$
$$= \mp \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5s^{g_R}}{s^{g_R} + 50\mu_R} = \begin{cases} \mp \frac{5}{1+50\mu_R}, & g_R = 0 \\ 0, & g_R \geq 1 \end{cases}$$

Per entrambi i segnali di ingresso (riferimento e disturbo), la specifica sull'errore può essere garantita con regolatore di tipo nullo ($g^R = 0$).
Adottando questo valore ed assumendo il guadagno μ_R positivo, si ha:

$$|e_{\infty}| = |e_{\infty}^0| + |e_{\infty d}| = \frac{10}{1+50\mu_R} + \frac{5}{1+50\mu_R} = \frac{15}{1+50\mu_R}$$

La specifica statica sarà quindi senz'altro soddisfatta se

$$\frac{15}{1+50\mu_R} \leq 0.025 \rightarrow \mu_R \geq \frac{15-0.025}{1.25} \approx 12$$

Progetto statico : conclusione

Rispetto al valore limite calcolato dalla precedente disequaglianza, conviene predisporre un opportuno margine di sicurezza, inteso a cautelarsi verso le inevitabili incertezze sui parametri del processo e sul valore dei disturbi.

Un valore opportuno potrebbe allora essere $\mu_R = 20$.

Il progetto statico è allora concluso con la scelta della funzione di trasferimento:

$$R_1(s) = 20$$

Progetto dinamico

Fattorizzata $R(s)$ come: $R(s) = R_1(s)R_2(s)$ si deve progettare

$$R_2(s) = \frac{\prod_i (1 + \tau_i s)}{\prod_i (1 + T_i s)}$$

in modo da soddisfare la specifica sull'errore a transitorio esaurito.

La funzione di trasferimento d'anello del sistema può essere scritta come:

$$L(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = R_2(s)L_1(s)$$

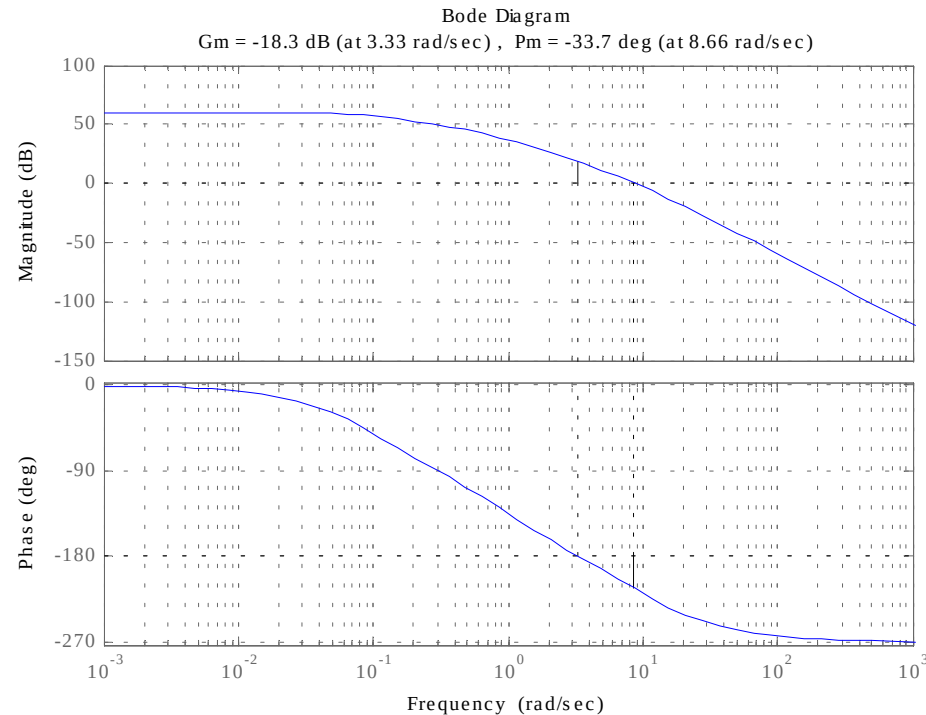
con

$$L_1(s) = R_1(s)G(s) = \frac{1000}{(1+0.1s)(1+s)(1+10s)}$$

Tentativo 1

Il primo tentativo da eseguire per il progetto di $R_2(s)$ consiste nel porre banalmente $R_2(s) = 1$.

La funzione di trasferimento d'anello coincide, allora, con $L_1(s)$, ed il relativo diagramma di Bode del modulo asintotico è tracciato di seguito:



Risultato 1

La pulsazione critica è abbondantemente superiore al valore limite imposto dalla specifica

$$\omega_c$$



Il margine di fase risulta, come facilmente calcolabile, negativo, per cui il sistema in anello chiuso risulterebbe addirittura instabile

$$\phi_m < 0$$

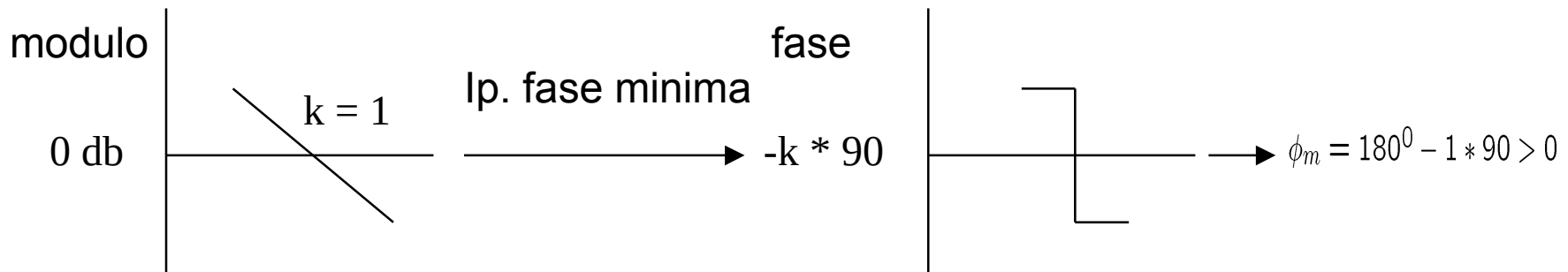


Idea

Per il progetto di $R_2(s)$ si può ricorrere al criterio di Bode, riguardo ai sistemi a **fase minima**.

Si ricorda che, per un sistema a fase minima, il fatto che l'attraversamento dell'asse a 0 dB da parte del diagramma asintotico del modulo della risposta in frequenza di L avvenga con pendenza -1 (-20 dB/decade) garantisce di norma un margine di fase positivo, tanto più prossimo ai 90° , quanto più ampio è il tratto di pendenza -1 .

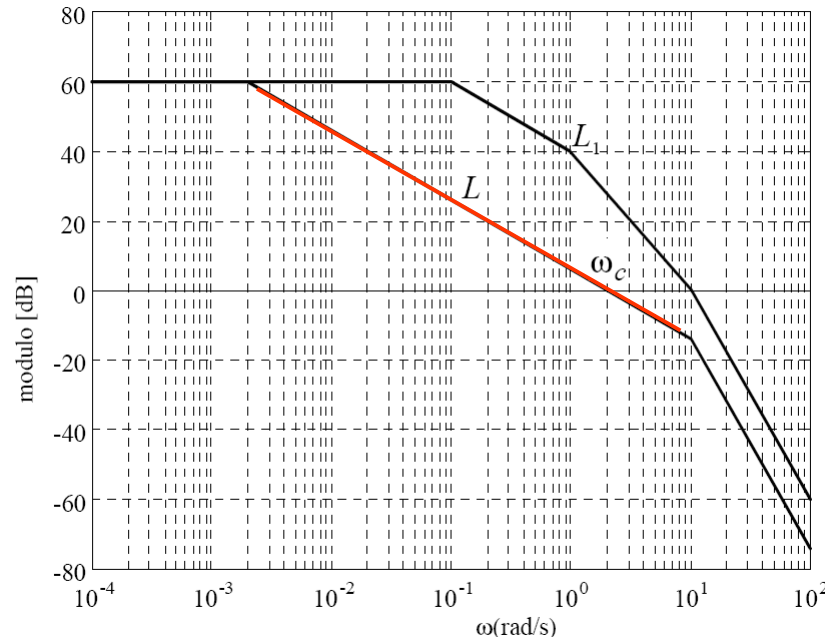
Conviene allora procedere determinando preliminarmente un opportuno andamento per il diagramma del modulo di L e, a posteriori, risalire all'espressione della funzione di trasferimento del regolatore.



Progetto grafico (1)

Si procede tracciando una $|L(j\omega)|$ di tentativo che soddisfi i vincoli

Individuare sull'asse a 0 dB un valore di pulsazione, superiore al limite inferiore richiesto per la pulsazione critica, e per questo punto tracciare un tratto di retta a pendenza -1 , destinato ad essere un tratto del diagramma di $|L|$.

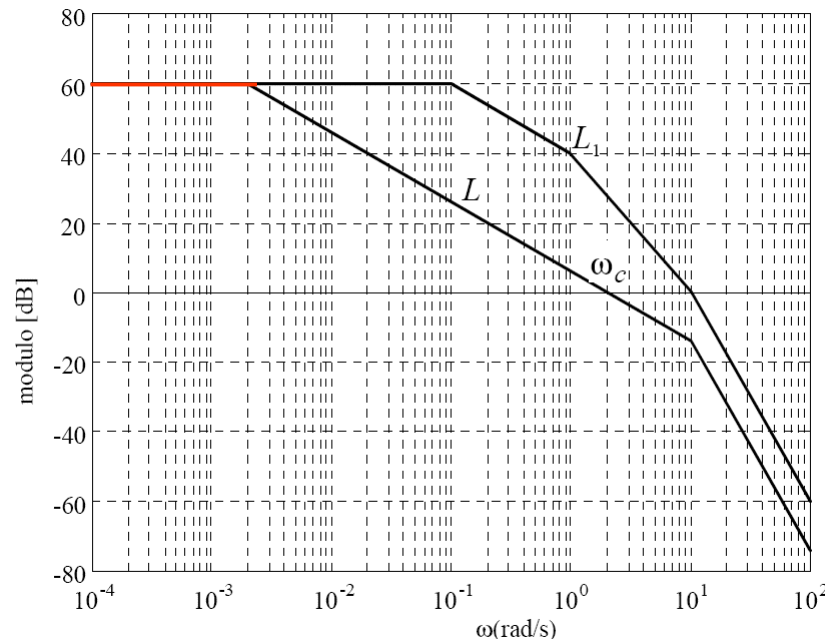


$$\omega_c \geq 1 \text{ rad/s}$$

Progetto grafico – bassa freq

In **bassa frequenza** si può operare come segue:

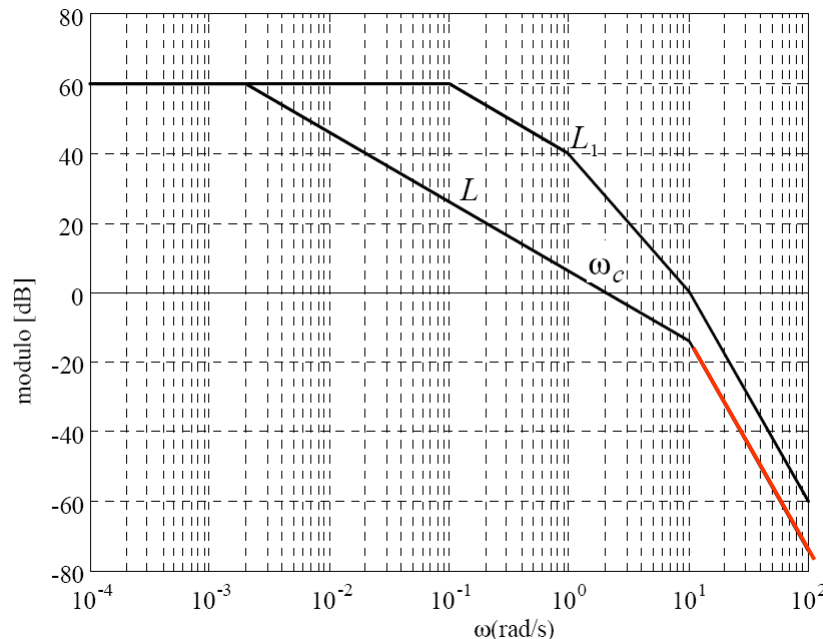
- il diagramma di $|L|$ deve avere la stessa pendenza di quello di $|L_1|$, altrimenti si modificherebbe il tipo del regolatore in sede di progetto dinamico;
- se il progetto statico si è concluso con un vincolo sul valore del guadagno μ_R , il valore di $|L|$ deve essere maggiore o uguale (di fatto è comodo sceglierlo uguale) a quello di $|L_1|$.



Progetto grafico – alta freq

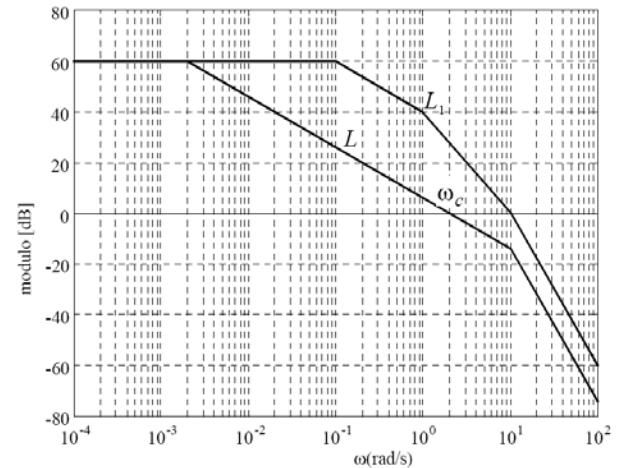
In **alta frequenza**, invece:

- il diagramma di $|L|$ deve avere pendenza maggiore o uguale in modulo (di fatto è comodo sceglierla uguale) a quella di $|L_1|$, altrimenti si perverrebbe al progetto di un regolatore non realizzabile (con più zeri che poli);
- il valore di $|L|$ deve essere minore o uguale a quello di $|L_1|$, per garantire la moderazione del controllo.



Progetto grafico – conclusione (1)

Scegliendo come pulsazione critica il valore 2 rad/s il grafico di $|L|$ e'



Il margine di fase in questo caso risulta:

$$\Phi_m = 180^\circ - |-\arctan(2/0.002) - 2 \arctan(2/10)| = 68^\circ$$



Le specifiche dinamiche sono quindi soddisfatte, e risulta:

$$L(s) = \frac{1000}{(1 + \frac{s}{0.002})(1 + \frac{s}{10})^2} = \frac{1000}{(1 + 500s)(1 + 0.1s)^2}$$

Progetto grafico – conclusione (2)

Per ricavare $R_2(s)$ si fa il rapporto tra L sintetizzata e L_1 originale

$$R_2(s) = \frac{L(s)}{L_1(s)} = \frac{1000}{(1+500s)(1+0.1s)^2} \frac{(1+0.1s)(1+s)(1+10s)}{1000} = \frac{(1+s)(1+10s)}{(1+500s)(1+0.1s)}$$

Infine:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = 20 \frac{(1+s)(1+10s)}{(1+500s)(1+0.1s)}$$

Si osservi che in alta frequenza il diagramma di $|L|$ non si congiunge con il diagramma di $|L_1|$.

Sarebbe stato lecito congiungere i due diagrammi, ma in questo caso si sarebbe ottenuto, come è facile verificare, un controllore di ordine 3 (con 3 poli), più problematico da realizzare.