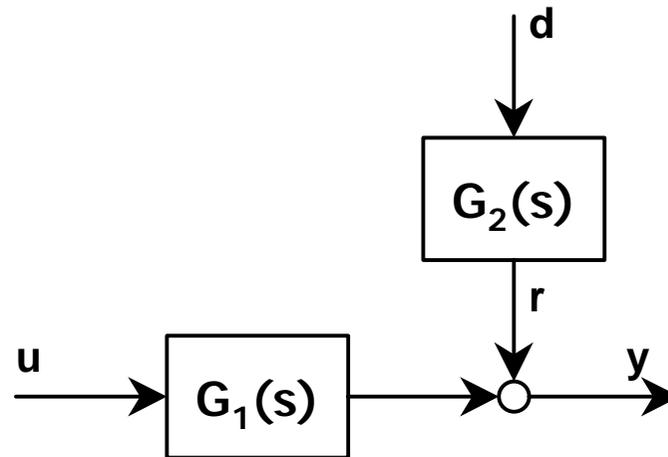


# **MOTORE A CORRENTE CONTINUA AD ECCITAZIONE COSTANTE**

**Analisi di un sistema di  
controllo di velocità**

# Il sistema da controllare

- Il motore a corrente continua ad eccitazione costante può essere espresso in termini di funzioni di trasferimento come



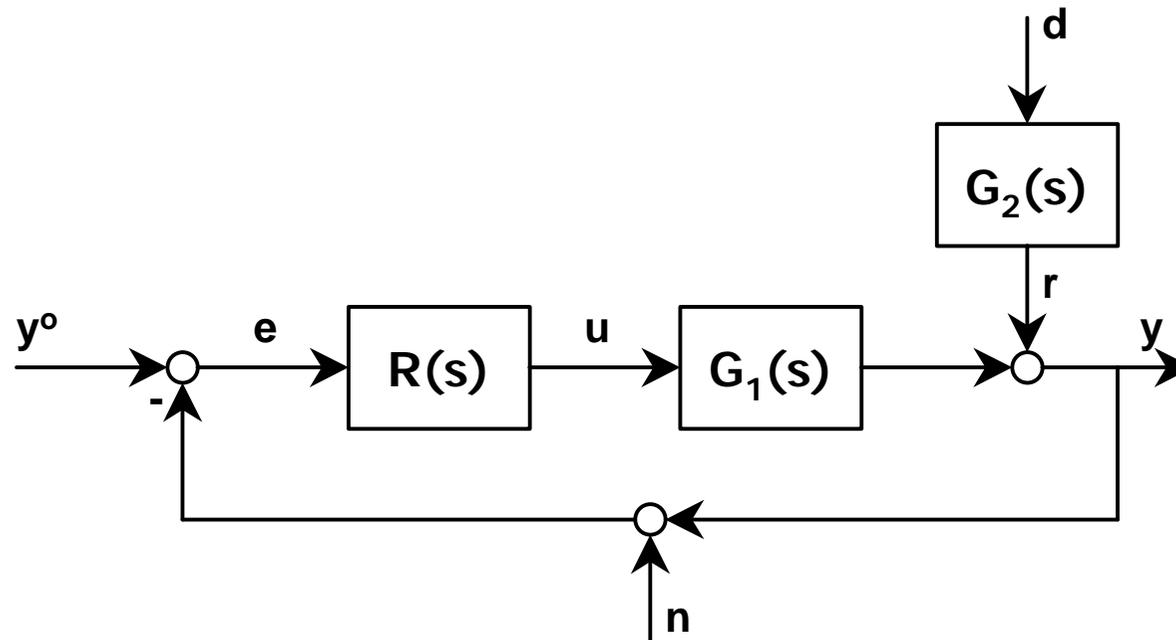
- Con dei valori realistici per i parametri si ottengono le seguenti funzioni di trasferimento (semplificate)

$$G_1(s) = \frac{1.5}{0.05s^2 + 15.008s + 2.4} = \frac{0.625}{(6.25s + 1)\left(\frac{1}{300}s + 1\right)}$$

$$G_2(s) = \frac{12.5}{6.25s + 1}$$

# Lo schema di controllo in retroazione

- Facciamo riferimento al seguente schema di controllo in retroazione



- Questo schema si differenzia da quello classico per la presenza del blocco  $G_2(s)$  al di fuori dell'anello, che deve essere considerato nel calcolo delle funzioni di trasferimento

# Obiettivi dell'esercitazione

- **Ricavare tutte le informazioni possibili sul comportamento del sistema di controllo in anello chiuso**
- **Verificare se le seguenti specifiche sono soddisfatte**
  - **Tempo di assestamento  $t_a < 0.1 s$**
  - **Inseguimento di un segnale sinusoidale  $y^o$  nella banda  $[0 \ 150]$  rad/s**
  - **Attenuazione di almeno 20 dB di un rumore di misura  $n$  nella banda  $[1000 \ 10000]$  rad/s**
  - **Attenuazione di almeno 20 dB di un disturbo  $d$  nella banda  $[0.01 \ 10]$  rad/s**

# Il regolatore *PI*

- Per il controllo si utilizza un regolatore di tipo *PI* (Proporzionale-Integrale), descritto dalla funzione di trasferimento

$$R(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) = K_p \frac{T_i s + 1}{T_i s}$$

- L'azione di controllo è proporzionale all'errore (tramite  $K_p$ ) ed all'integrale dell'errore (tramite  $K_i$ )

- Posto  $K_p = 2000$  e  $T_i = 6.25$  si ottiene il seguente regolatore

$$R(s) = \frac{2000s + 320}{s} = \frac{320(6.25s + 1)}{s}$$

- I parametri del regolatore sono stati tarati in modo da cancellare con lo zero del regolatore il polo più in bassa frequenza del sistema
  - Spunti di riflessione: valutare il comportamento del sistema di controllo al variare dei parametri  $K_p$  e  $T_i$

# La funzione d'anello $L(s)$

- **Dall'analisi della funzione d'anello  $L(s) = R(s)G_1(s)$  possiamo ricavare informazioni relative ai seguenti aspetti**
  - **Stabilità nominale**
  - **Errore a transitorio esaurito per segnali canonici**
  - **Banda passante del sistema di controllo**
  - **Robustezza della stabilità in condizioni perturbate (indicatori sintetici)**
  - **Caratteristiche dei poli dominanti del sistema in anello chiuso**

- **Nel nostro caso la funzione d'anello vale**

$$L(s) = R(s)G_1(s) = \frac{200}{s \left( \frac{1}{300}s + 1 \right)}$$

- **Attenzione: controllare sempre che non vi siano cancellazioni di poli e zeri non asintoticamente stabili tra la  $G(s)$  e la  $R(s)$ . Se queste si verificano il sistema in anello chiuso sarà sicuramente instabile**

# Stabilità nominale ed errore a regime

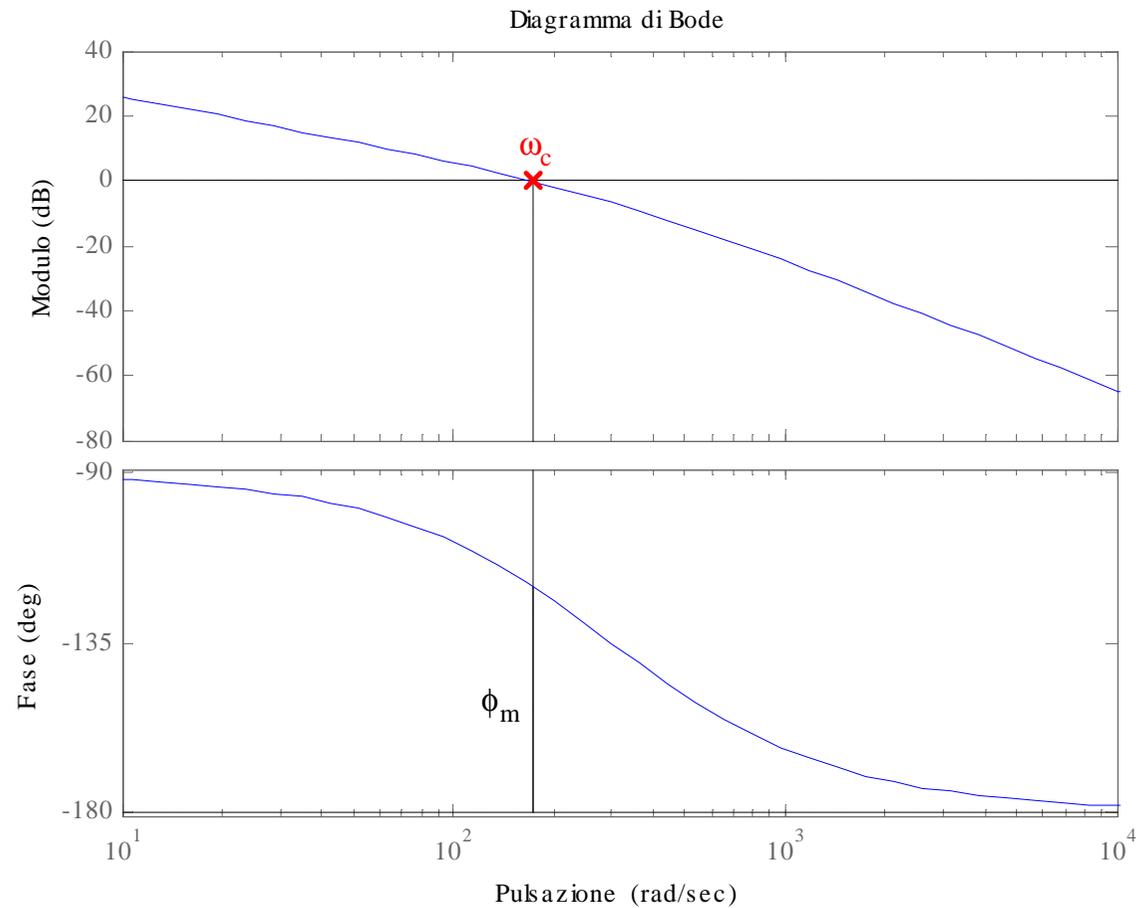
- Lo studio delle radici del polinomio caratteristico del sistema in anello chiuso ci permette di valutarne la stabilità

$$\Psi_{L(s)} = L_N(s) + L_D(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} \simeq -150 \pm j193.6$$

- In questo modo si ottengono solo informazioni sulla stabilità nominale del sistema
  - Criterio di Bode
  - Criterio di Nyquist
- La presenza di un integratore (polo nell'origine) nell'anello garantisce un errore nullo a transitorio esaurito in risposta ad uno scalino sul riferimento  $y^o$  (noto dalla teoria)
  - La presenza dell'integratore garantisce errore nullo anche in risposta ad uno scalino sul disturbo  $d$  (perchè la funzione di trasferimento  $G_2(s)$  non contiene nessun integratore)

# Diagramma di Bode della $L(s)$

- Significato grafico di pulsazione critica  $\omega_c$ , margine di fase  $f_m$  e margine di guadagno  $k_m$



# Calcolo dei principali parametri

- Oltre al calcolo per via grafica si può utilizzare un calcolo basato sulla definizione

- Pulsazione critica  $\omega_c$

$$|L(j\omega_c)| = \left| \frac{200}{j\omega_c \left( \frac{1}{300}j\omega_c + 1 \right)} \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_c \simeq 173 \text{ rad/s}$$

- Margine di fase  $f_m$

$$\phi_m = 180^\circ + \angle L(j\omega_c) \simeq 60^\circ$$

- Margine di guadagno  $k_m$

$$k_m = \frac{1}{|L(j\omega_p)|} \quad \text{con } \angle L(j\omega_p) = -180^\circ$$

- Se come nel nostro caso  $\angle L(j\omega) \neq -180^\circ \quad \forall \omega \neq \infty$ , si pone per convenzione  $k_m = \infty$

# Significato dei parametri

- **Pulsazione critica:** dà una misura della “velocità di risposta” del sistema, dal momento che coincide in prima approssimazione con la banda passante del sistema di controllo
- **Margine di fase:** è interpretabile come un indice di robustezza che quantifica il massimo ritardo aggiuntivo tollerabile nell’anello senza perdere la stabilità
- **Margine di guadagno:** è un indice di robustezza che quantifica il massimo guadagno tollerabile nell’anello senza perdere la stabilità

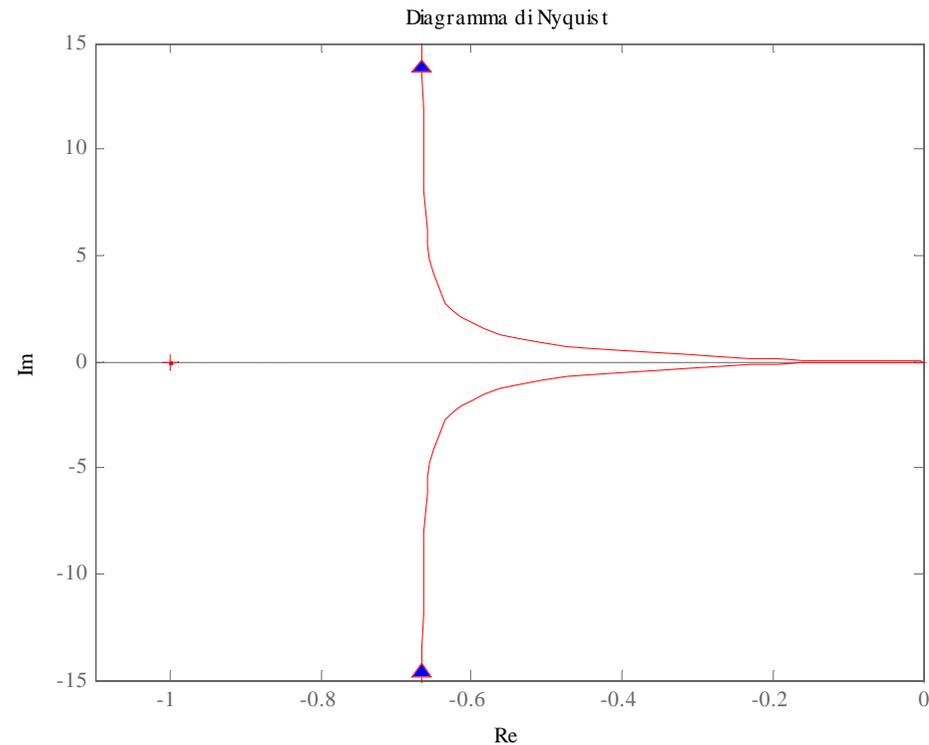
# Analisi di stabilità

- **Criterio di Bode**

- Se il guadagno della funzione d'anello  $m_L > 0$  e il margine di fase  $f_m > 0$  allora il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile

- **Criterio di Nyquist**

- Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se e solo se il numero di giri attorno al punto -1 è uguale al numero di poli a parte reale positiva



# Calcolo dei poli dominanti in anello chiuso

- È possibile calcolare in maniera approssimativa i poli dominanti del sistema in anello chiuso a partire da pulsazione critica e margine di fase

- Se  $f_m > 75^\circ$  il sistema ha un polo dominante reale con pulsazione

$$\omega_p \simeq \omega_c$$

- Se  $f_m < 75^\circ$  il sistema ha poli dominanti complessi coniugati con pulsazione naturale e smorzamento dati rispettivamente da

$$\omega_p \simeq \omega_c \quad \xi \simeq \frac{\phi_m}{100}$$

- Nel nostro caso

$$\omega_p \simeq 170 \text{ rad/s} \quad \xi \simeq 0.6$$

per cui il vincolo sul tempo di assestamento è ampiamente rispettato, infatti

$$t_a \simeq \frac{500}{\omega_c \phi_m} = 0.05 \text{ sec}$$

# Analisi delle funzioni di sensitività

- Per valutare le prestazioni del sistema di controllo analizziamo le funzioni di sensitività
- Per via della presenza del blocco  $G_2(s)$  fuori dall'anello le funzioni di sensitività non coincidono con quelle "classiche"
  - Funzione di sensitività complementare

$$F(s) = \frac{Y(s)}{Y^\circ(s)} = -\frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{R(s)G_1(s)}{1 + R(s)G_1(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

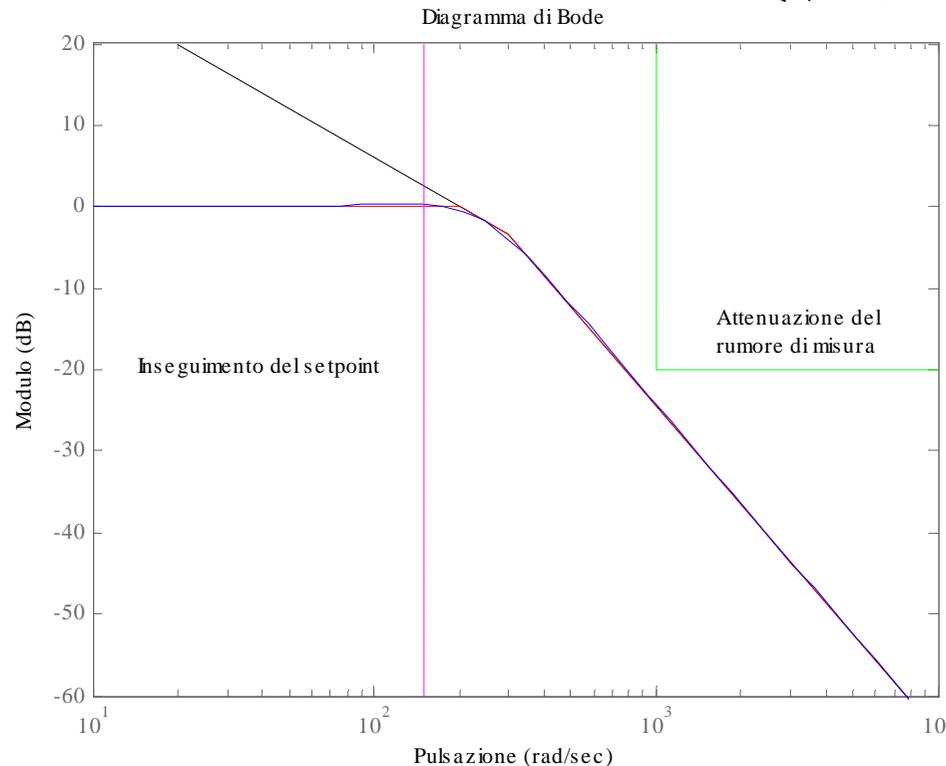
- Funzione di sensitività

$$S(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = G_2(s) \frac{1}{1 + R(s)G_1(s)} = G_2(s) \frac{1}{1 + L(s)}$$

# Funzione di sensitività complementare

- **Regola per il tracciamento approssimato del diagramma del modulo**

$$|F(j\omega)| = \begin{cases} 1 & \omega < \omega_c \\ |L(j\omega)| & \omega > \omega_c \end{cases}$$



- **Il vincolo sul setpoint è rispettato**
- **Il vincolo sul rumore di misura  $n$  è rispettato**

- **$F(s)$  si comporta come un passabasso di banda  $w_c$**

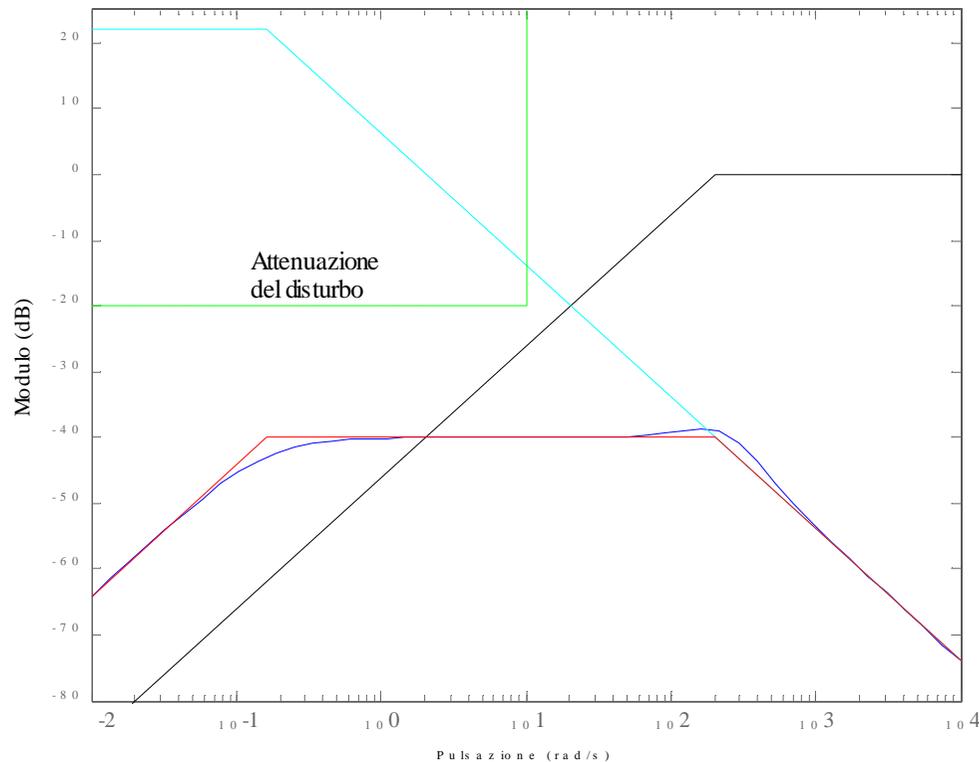
# Funzione di sensitività

- Utilizzando le proprietà del modulo in dB si può concludere che

$$S(s) = G_2(s) \frac{1}{1 + L(s)} \Rightarrow |S(j\omega)|_{dB} = |G_2(j\omega)|_{dB} + \left| \frac{1}{1 + L(s)} \right|_{dB}$$

$$|S(j\omega)| = \begin{cases} |G_2(j\omega)| - |L(j\omega)| & \omega < \omega_c \\ |G_2(j\omega)| & \omega > \omega_c \end{cases}$$

Dia



- Il vincolo sul disturbo  $d$  è rispettato

