ESERCIZI

Risposta allo scalino

Teorema della risposta in frequenza

Diagrammi di Bode

Risposta a scalino - Richiami

- **L'analisi della *risposta a scalino* di un sistema permette di evidenziarne le caratteristiche salienti (ad esempio in termini di smorzamento e pulsazione dei poli dominanti).**

- **Viceversa, dato un sistema è necessario saper individuare in maniera approssimata le caratteristiche salienti della risposta a scalino (tempo di assestamento, periodo di eventuali oscillazioni, e così via).**

- **Per un calcolo rigoroso della risposta allo scalino si possono utilizzare le formule di antitrasformazione e lo sviluppo di Heaviside.**

Risposta a scalino (1)

- **Dato il sistema descritto dalla funzione di trasferimento**

$$G(s) = \frac{s+150}{(s+10)(s^2+2s+15)}$$

  - **Trovare il valore di $y(0)$, $\dot{y}(0)$ e $y(\infty)$ della risposta ad uno scalino unitario con il teorema del valore iniziale e del valore finale**

  - **Scrivere un'approssimazione a poli dominanti della funzione e, sulla base di questa, valutare approssimativamente le principali caratteristiche della risposta ad uno scalino unitario**
    - **Valore di regime**
    - **Tempo di assestamento**
    - **Periodo di eventuali oscillazioni**
    - **Ampiezza di eventuali sovraelongazioni**

Risposta a scalino (2)

$$G(s) = \frac{s+150}{(s+10)(s^2+2s+15)}$$

- **Calcolo di $y(0)$ con il teorema del valore iniziale**

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sG(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to\infty} \frac{s+150}{(s+10)(s^2+2s+15)} = 0$$

- **Calcolo di $\dot{y}(0)$ con il teorema del valore iniziale**

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\left(sG(s)\frac{1}{s} - y(0)\right) = 0$$

- **Calcolo di $y(\infty)$ con il teorema del valore finale**

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s} = G(0) = 1$$

  - **Verificare SEMPRE la stabilità del sistema per essere sicuri che il risultato ottenuto sia sensato**

Risposta a scalino (3)

$$G(s) = \frac{s + 150}{(s + 10)(s^2 + 2s + 15)}$$

- **Approssimazione a poli dominanti**
  - **Calcolo dei poli dominanti**

$$\begin{cases} p_1 = -10 \\ p_{2,3} = -1 \pm j\sqrt{14} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \tilde{p}_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{14}$$

  - **Zeri**

$$z_1 = -150 \quad \Rightarrow \quad \text{nessuno zero}$$

  - **Calcolo del guadagno**

$$\mu = G(0) = 1$$

  - **Approssimazione a poli dominanti (deve mantenere il guadagno)**

$$G_a(s) = \frac{15}{s^2 + 2s + 15}$$

Risposta a scalino (4)

$$G_a(s) = \frac{15}{s^2 + 2s + 15}$$

- **Pulsazione naturale e smorzamento dei poli**

$$\omega_n = 3.87 \qquad \xi = 0.26$$

- **Tempo di assestamento**

$$t_a \approx \frac{5}{\omega_n \xi} = 4.96 \text{ sec}$$

- **Periodo di eventuali oscillazioni**

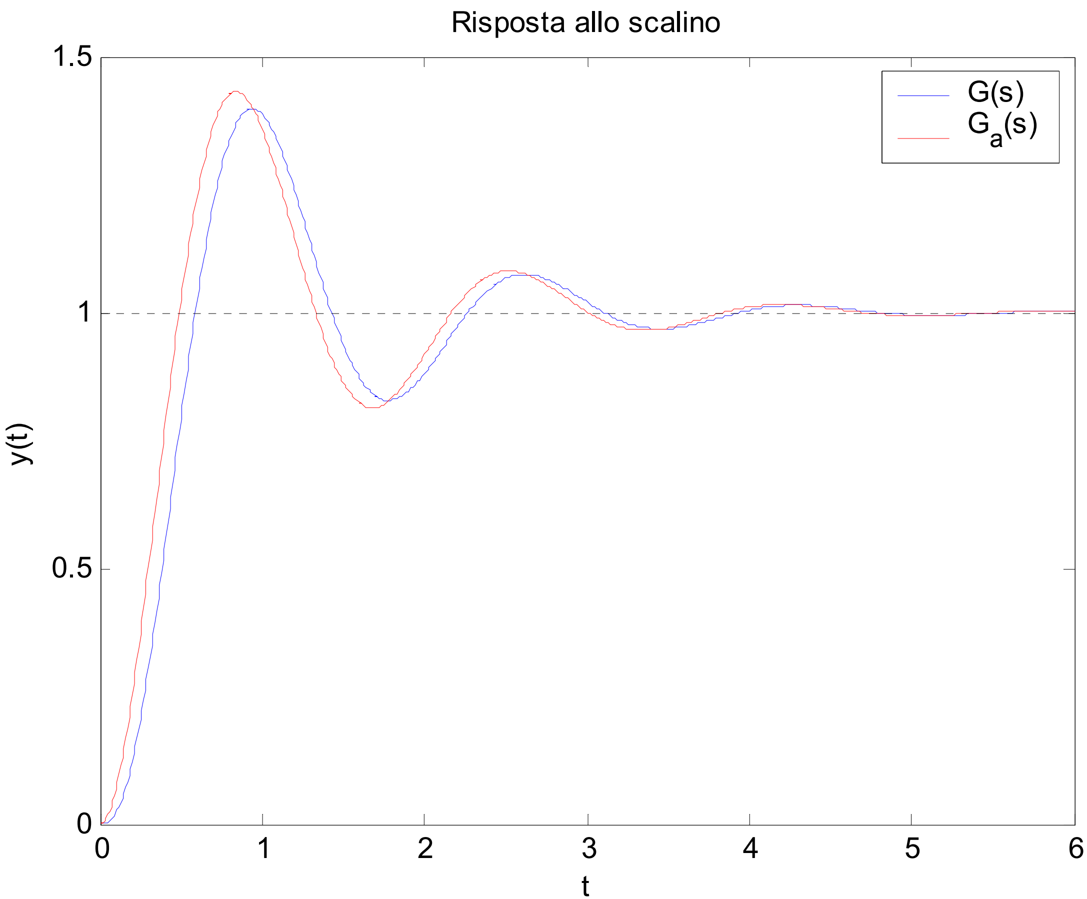
$$T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 1.68 \text{ sec}$$

- **Ampiezza di eventuali sovraelongazioni**

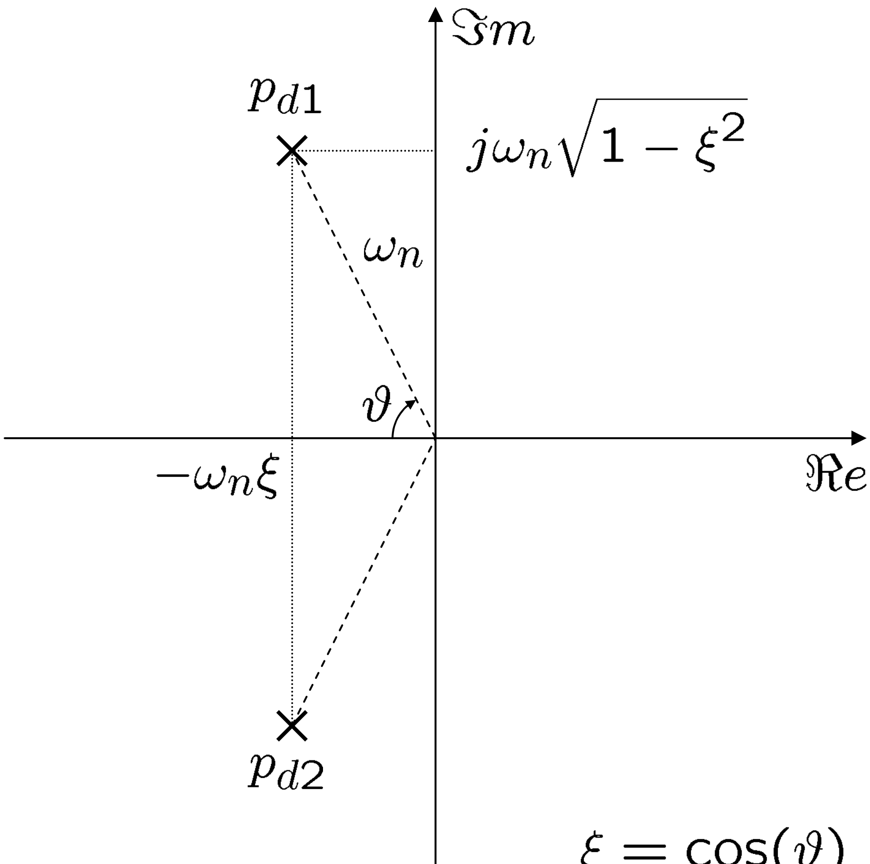
$$\Delta = 100 e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 43\%$$

Risposta allo scalino (5)

- **Confronto della risposta del sistema vero e dell'approssimazione a poli dominanti**



Parametri caratteristici del sistema



$$\xi = \cos(\vartheta)$$

- **Tempo di assestamento**

$$t_a \approx \frac{5}{|\Re e(p_d)|} = \frac{5}{\omega_n \xi}$$

- **Periodo delle oscillazioni**

$$T = \frac{2\pi}{|\Im m(p_d)|} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

Risposta in frequenza - Richiami

- **La *risposta in frequenza* di un sistema descrive sinteticamente il comportamento nei confronti delle diverse componenti armoniche del segnale in ingresso.**

- **Un sistema LTI risponde ad una sinusoide di pulsazione ω con una sinusoide con uguale pulsazione, ma con ampiezza e fase diverse.**

- **La risposta in frequenza $G(j\omega)$ si calcola da $G(s)$ ponendo $s = j\omega$.**

- **In sintesi, in un sistema asintoticamente stabile, per qualunque condizione iniziale, applicando l'ingresso**

  $$u(t) = A \sin(\bar{\omega} t + \phi)$$

  l'uscita tenderà asintoticamente al valore

  $$y(t) = A|G(j\bar{\omega})| \sin(\bar{\omega} t + \phi + \angle G(j\bar{\omega}))$$

Teorema della risposta in frequenza (1)

- **Calcolare la risposta asintotica del sistema**

$$G(s) = \frac{s + 150}{(s+10)(s^2+2s+15)}$$

alla sinusoide $u(t) = 10\sin(5t + \pi/4)$

- **Attraverso il teorema della risposta in frequenza**

$$y(t) = B\sin(5t + \psi)$$

dove

$$B = 10 \cdot |G(j5)| = 10\frac{|5j + 150|}{|5j+10| \cdot |-25 + 10j + 15|}$$

$$= 10\frac{\sqrt{150^2 + 5^2}}{\sqrt{10^2+5^2}\sqrt{(-10)^2 + 10^2}} = 9.49$$

$$\psi = \frac{\pi}{4} + \angle G(j5) = \frac{\pi}{4} + \angle(5j + 150) - \angle(5j + 10) - \angle(-25 + 10j + 15)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \mathrm{atan}\left(\frac{5}{150}\right) - \mathrm{atan}\left(\frac{5}{10}\right) - \left(\pi - \mathrm{atan}\left(\frac{10}{10}\right)\right) = -2.00 \text{ rad}$$

Diagrammi di Bode - Richiami

- **I *diagrammi di Bode* costituiscono una rappresentazione grafica del modulo e della fase della risposta in frequenza**
  - **Vengono tracciati in scala semilogaritmica**
  - **Solitamente si utilizzano le regole per il tracciamento dei diagrammi asintotici**

Diagrammi di Bode (1)

- **Tracciare il diagramma di Bode asintotico del modulo e della fase della funzione di trasferimento**

$$G(s) = \frac{s+150}{(s+10)(s^2+2s+15)}$$

- **Dire se il sistema si comporta come un filtro passa-basso o passa-alto e valutarne approssimativamente la banda passante**

Diagrammi di Bode (2)

$$G(s) = \frac{s + 150}{(s + 10)(s^2 + 2s + 15)}$$

- **Guadagno**

  $\mu = G(0) = 1$

- **Tipo**

  $g = 0$

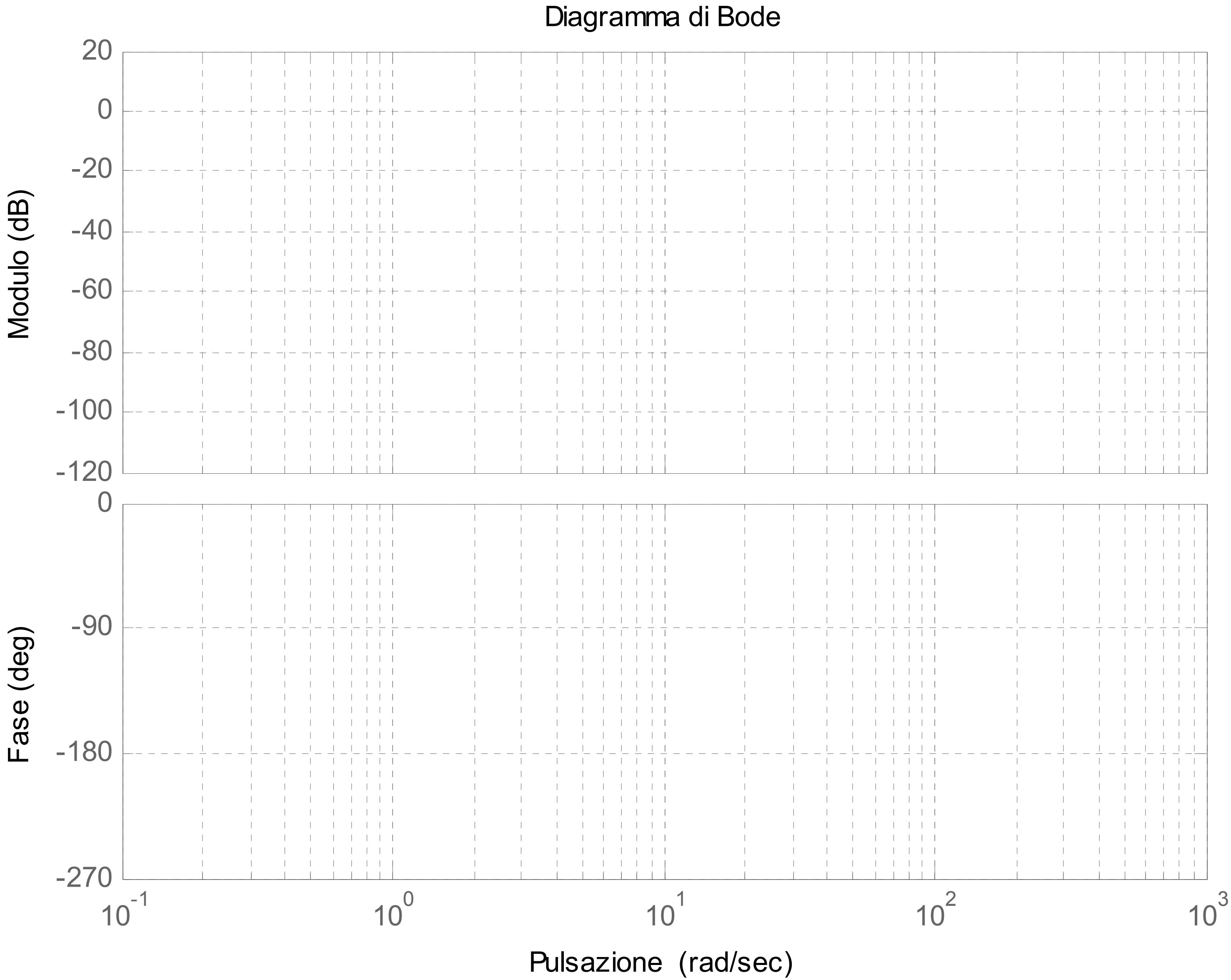
- **Zeri**

  $z_1 = -150 \quad \Rightarrow \quad \omega_{z1} = 150 \text{ rad/s}$

- **Poli**

$$\begin{cases} p_1 = -10 \\ p_{2,3} = -1 \pm j\sqrt{14} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega_{p1} = 10 \text{ rad/s} \\ \omega_{p2,p3} = 3.87 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Diagrammi di Bode (3)



Diagrammi di Bode (4)

- **Il sistema si comporta come un filtro passabasso di banda passante** $\omega_c \approx 4 \text{ rad/sec}$