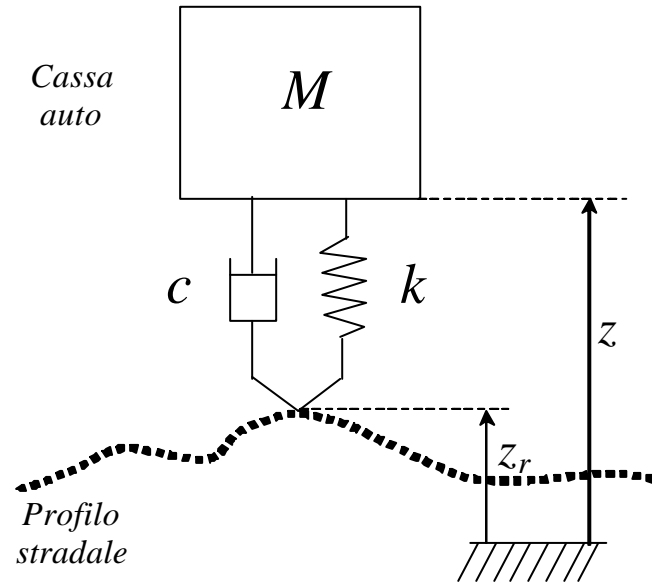
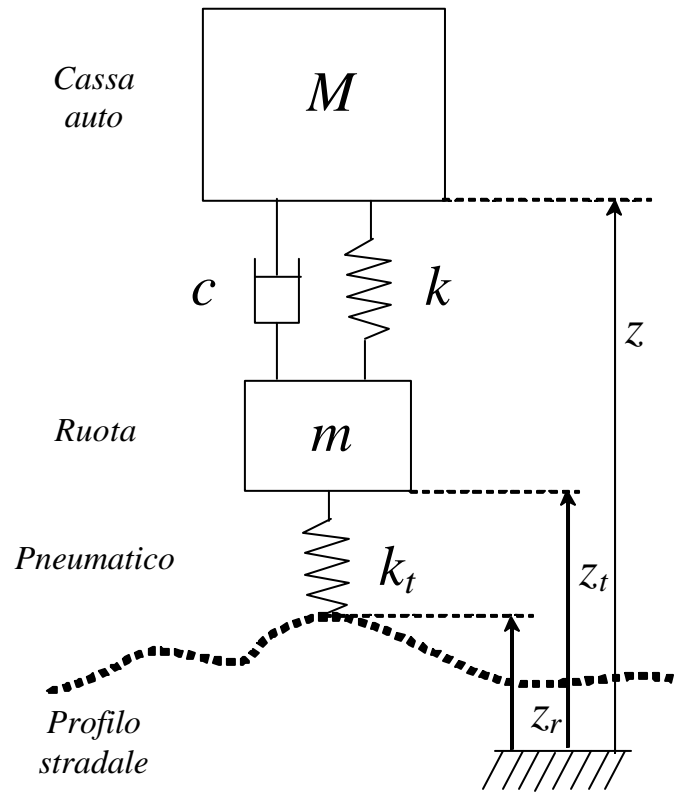
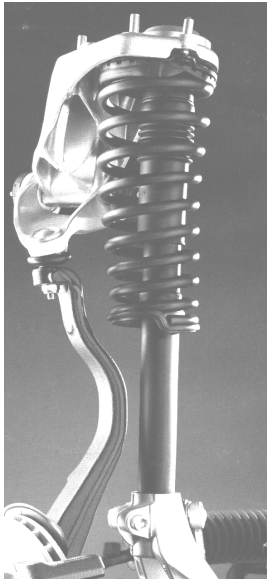


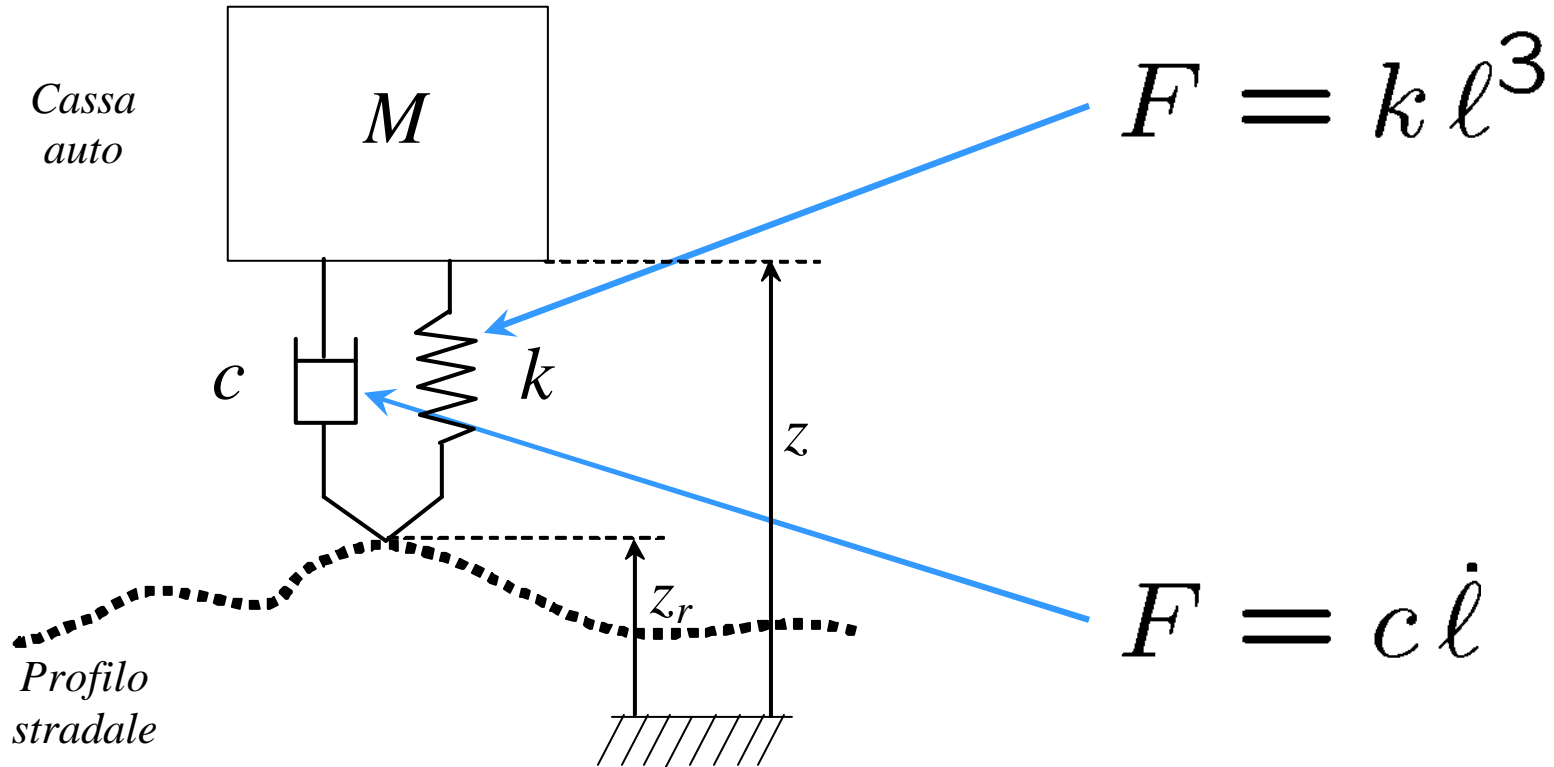
UNA SOSPENSIONE PER AUTOVEICOLO

Modello, equilibri, linearizzazione,
analisi di stabilità

Una sospensione per autoveicolo



Il modello



$$M\ddot{z} = -c(\dot{z} - \dot{z}_r) - \boxed{k(z - z_r - \Delta_s)^3} - Mg$$

Modello in variabili di stato

$$M\ddot{z} = -c(\dot{z} - \cancel{\dot{z}_r}) - k(z - z_r - \Delta_s)^3 - Mg$$

Variabili di stato

$$x_1 = z$$

$$x_2 = \dot{z}$$

Variabili di ingresso/uscita

$$u = z_r$$

$$y = z$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{c}{M}x_2 - \frac{k}{M}(x_1 - u - \Delta_s)^3 - g \\ y = x_1 \end{cases}$$

Equilibri

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{c}{M}x_2 - \frac{k}{M}(x_1 - u - \Delta_s)^3 - g \\ y &= x_1 \end{cases}$$

Annullando le derivate all'equilibrio si ottiene

$$\begin{cases} 0 &= \bar{x}_2 \\ 0 &= -\frac{k}{M}(\bar{x}_1 - \bar{u} - \Delta_s)^3 - g \\ \bar{y} &= \bar{x}_1 \end{cases}$$

$$k(\bar{z} - \bar{z}_r - \Delta_s)^3 + Mg = 0$$

ovvero

$$\begin{cases} \bar{y} &= \bar{x}_1 = \bar{u} + \Delta_s - \sqrt[3]{\frac{Mg}{k}} \\ \bar{x}_2 &= 0 \end{cases}$$

Linearizzazione di un modello

Dato un generico modello non lineare tempo invariante

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x(t), u(t)) \\ y &= g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

il modello linearizzato nell'intorno dell'equilibrio

$$\bar{x}, \bar{u}$$

è dato da

$$\begin{cases} \delta \dot{x} &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u \\ \delta y &= \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u \end{cases}$$

dove

$$\delta x(t) = x(t) - \bar{x}, \delta u(t) = u(t) - \bar{u}, \delta y(t) = y(t) - \bar{y}$$

Il modello linearizzato

In un intorno dell'equilibrio

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}, \bar{y}$$

definite le variazioni di ciascuna variabile rispetto al valore di equilibrio

$$\begin{aligned}\delta x_1 &= x_1 - \bar{x}_1 \\ \delta x_2 &= x_2 - \bar{x}_2 \\ \delta u &= u - \bar{u} \\ \delta y &= y - \bar{y}\end{aligned}$$

si ottiene il seguente modello linearizzato

$$\begin{cases} \delta \dot{x}_1 &= \delta x_2 \\ \delta \dot{x}_2 &= -\frac{3k}{M} (\bar{x}_1 - \bar{u} - \Delta_s)^2 \delta x_1 - \frac{c}{M} \delta x_2 + \frac{3k}{M} (\bar{x}_1 - \bar{u} - \Delta_s)^2 \delta u \\ \delta y &= \delta x_1 \end{cases}$$

Stabilità dell'equilibrio

$$\begin{cases} \delta \dot{x}_1 &= \delta x_2 \\ \delta \dot{x}_2 &= -\frac{3k}{M} (\bar{x}_1 - \bar{u} - \Delta_s)^2 \delta x_1 - \frac{c}{M} \delta x_2 + \frac{3k}{M} (\bar{x}_1 - \bar{u} - \Delta_s)^2 \delta u \\ \delta y &= \delta x_1 \end{cases}$$

La matrice dinamica del sistema linearizzato sarà quindi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3k}{M} (\bar{x}_1 - \bar{u} - \Delta_s)^2 & -\frac{c}{M} \end{bmatrix}$$

da cui si calcola facilmente il polinomio caratteristico

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + \frac{c}{M} \lambda + \frac{3k}{M} (\bar{x}_1 - \bar{u} - \Delta_s)^2$$

Poichè tutti i coefficienti del polinomio caratteristico sono positivi ed il sistema è del secondo ordine, possiamo concludere che esso è asintoticamente stabile.

Autovalori e parametri del modello

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + \frac{c}{M}\lambda + \frac{3k}{M}(\bar{x}_1 - \bar{u} - \Delta_s)^2$$

Dall'analisi del discriminante del polinomio di secondo grado

$$\Delta = \frac{c^2 - 12Mk(\bar{x}_1 - \bar{u} - \Delta_s)^2}{M^2}$$

si scopre che gli autovalori saranno reali o complessi a seconda del segno di

$$c^2 - 12Mk(\bar{x}_1 - \bar{u} - \Delta_s)^2$$

ovvero a seconda del valore attribuito ai parametri.

Un esempio reale: modello

Un possibile insieme di valori realistici per i parametri del modello è

$$M = 400 \text{ Kg}$$

$$k = 20 \text{ KN/m}$$

$$c = 1,3 \text{ KNs/m}$$

$$\Delta_s = 1 \text{ m}$$

Otteniamo quindi il seguente modello non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -3,25 x_2 - 50 (x_1 - u - 1)^3 - g \\ y = x_1 \end{cases}$$

Un esempio reale: modello linearizzato

Scelto l'equilibrio

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{y} = \bar{x}_1 = 0,4189 \text{ m}$$

otteniamo il seguente modello linearizzato

$$\begin{cases} \delta \dot{x}_1 &= \delta x_2 \\ \delta \dot{x}_2 &= -50,65 \delta x_1 - 3,25 \delta x_2 + 50,65 \delta u \\ \delta y &= \delta x_1 \end{cases}$$

a cui corrisponde la matrice dinamica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -50,65 & -3,25 \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono

$$\lambda_i(A) = -1,625 \pm j6,93$$

Concludiamo quindi che l'equilibrio è asintoticamente stabile.

Un esempio reale: moto libero

Supponiamo di partire dalle seguenti condizioni iniziali

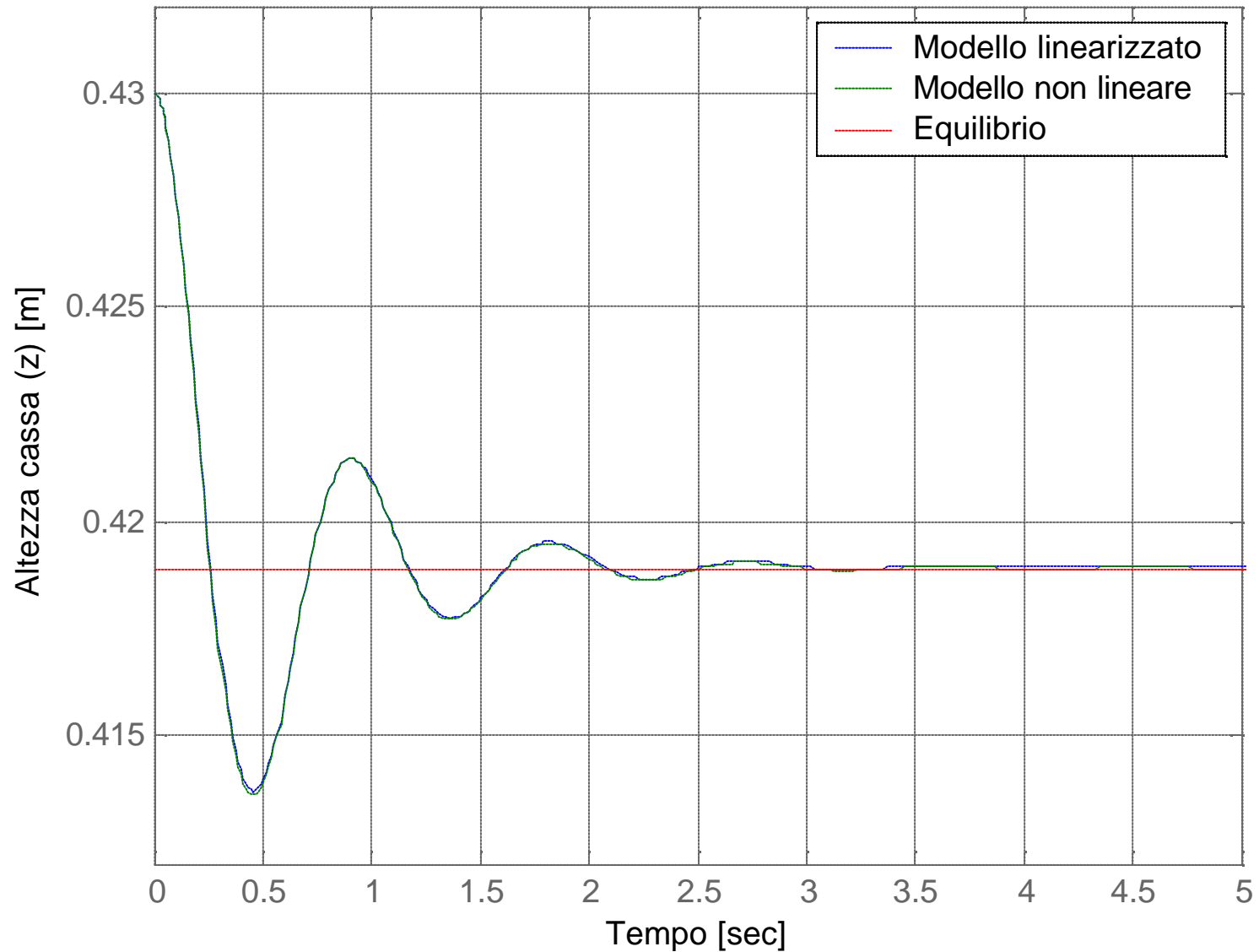
$$x_1(0) = 0,43 \text{ m}, \quad x_2(0) = 0$$

corrispondenti, nel modello linearizzato, ai seguenti scostamenti

$$\delta x_1(0) = 0,0111 \text{ m}, \quad \delta x_2(0) = 0$$

Supponendo ovviamente nulli sia l'ingresso del modello non lineare che quello del modello linearizzato, confrontiamo il moto libero del modello non lineare con quello del modello linearizzato.

Un esempio reale: moto libero



Un esempio reale: moto forzato

Supponiamo di partire dalle seguenti condizioni iniziali

$$x_1(0) = 0,4189 \text{ m}, \quad x_2(0) = 0$$

corrispondenti all'equilibrio intorno a cui abbiamo linearizzato, ovvero

$$\delta x_1(0) = 0, \quad \delta x_2(0) = 0$$

Supponiamo che la strada abbia un profilo sinusoidale realistico, ovvero scegliamo come ingresso

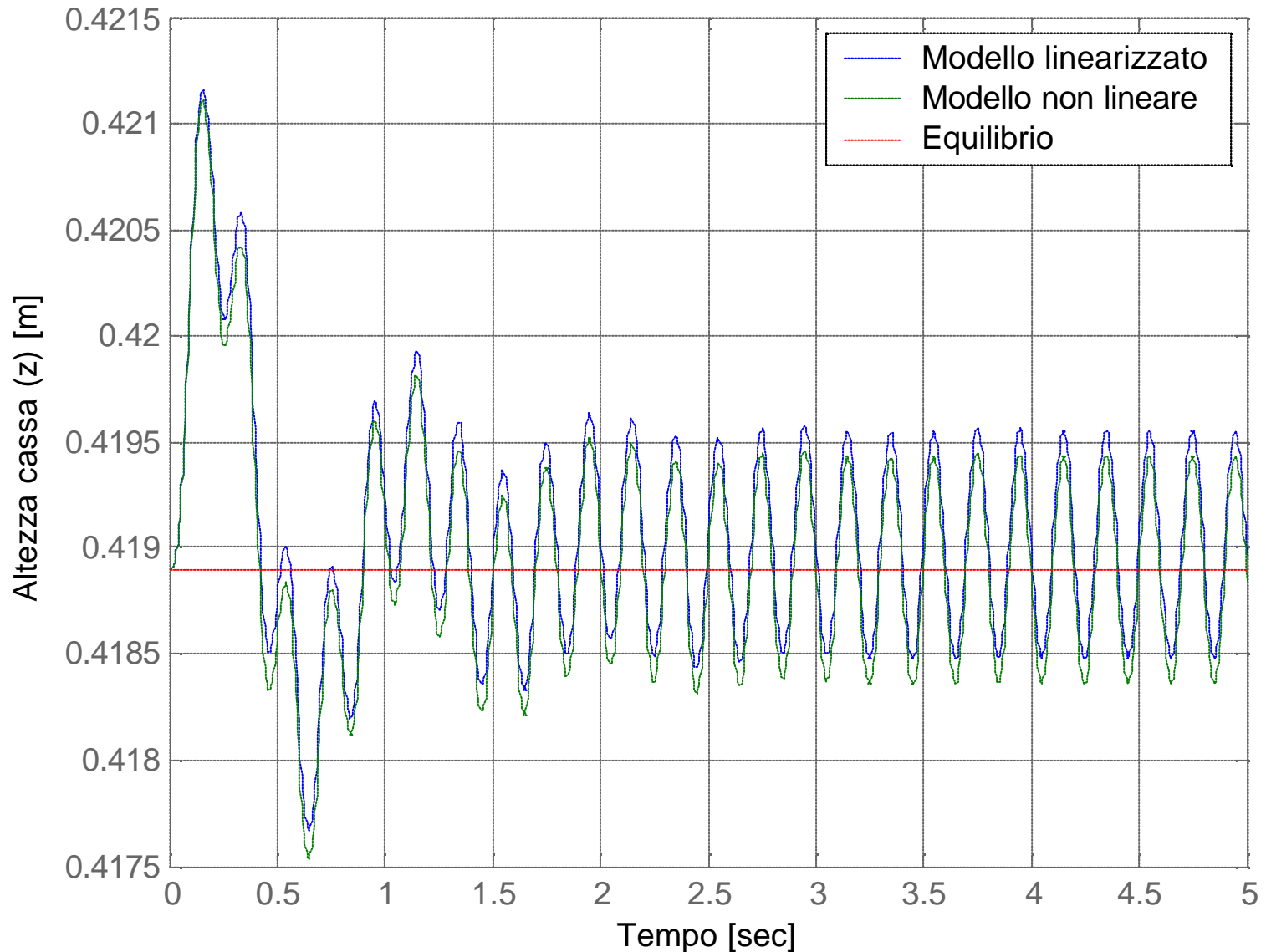
$$u(t) = 0.01 \sin(10\pi t) \text{ m}$$

corrispondente, nel modello linearizzato a

$$\delta u(t) = 0.01 \sin(10\pi t) \text{ m}$$

Confrontiamo il moto libero del modello non lineare con quello del modello linearizzato.

Un esempio reale: moto forzato



Un esempio reale: moto forzato

