POLITECNICO
MILANO 1863

Fondamenti di Automatica

(per Ing. Biomedica)

A.A. 2020/2021

A. Colombo, S. Formentin, L. Piroddi

26/01/2020

- Controllare il numero di pagine del fascicolo che deve essere di 4 incluso questo frontespizio.
- Durante l'esame non è possibile usare appunti, libri, ecc.
- La precisione e la chiarezza delle risposte saranno oggetto di valutazione.

1. Si consideri il sistema lineare tempo-invariante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = cx(t) + du(t) \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & k \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 5 \\ k \end{bmatrix}, c = [\,-2 \;\; -2\,], d = 3$$

1.1) Si discuta per quali valori del parametro reale k il sistema risulta asintoticamente stabile.

Essendo la matrice A triangolare gli autovalori sono -2 e k. Quindi, deve essere $k < 0$.

Si ponga ora $k = -4$.

1.2) Calcolare il movimento libero dell'uscita a partire dallo stato iniziale $x(0) = [1\ 0]^T$.

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) \quad \rightarrow \quad x_1(t) = e^{-2t}\cdot 1$$

$$\dot{x}_2(t) = -4x_2(t) + e^{-2t} \quad \rightarrow \quad x_2(t) = e^{-4t}\cdot 0 + \int_0^t e^{-4(t-\tau)}e^{-2\tau}d\tau = 0.5e^{-2t} - 0.5e^{-4t}$$

$$y(t) = -2x_1(t) - 2x_2(t) = -2e^{-2t} - 2(0.5e^{-2t} - 0.5e^{-4t}) = -3e^{-2t} + e^{-4t}$$

1.3) Calcolare la funzione di trasferimento del sistema.

$$G(s) = \frac{3s^2 + 16s - 10}{s^2 + 6s + 8}$$

1.4) Calcolare analiticamente la risposta a uno scalino unitario del sistema.

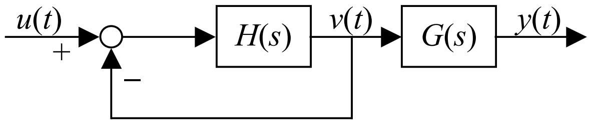
$$Y(s) = \frac{3s^2 + 16s - 10}{(s+2)(s+4)s} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+2} + \frac{\alpha_3}{s+4} = \frac{\alpha_1(s+2)(s+4) + \alpha_2 s(s+4) + \alpha_3 s(s+2)}{(s+2)(s+4)s}$$

$s = 0 \;\rightarrow\; -10 = 8\alpha_1 \;\rightarrow\; \alpha_1 = -5/4 \qquad s = -2 \;\rightarrow\; -30 = -4\alpha_2 \;\rightarrow\; \alpha_2 = 15/2$

$s = -4 \;\rightarrow\; -26 = 8\alpha_3 \;\rightarrow\; \alpha_3 = -13/4$

$$y(t) = \left(-\frac{5}{4} + \frac{15}{2}e^{-2t} - \frac{13}{4}e^{-4t}\right)\text{sca}(t)$$

2. Si consideri il sistema rappresentato in figura,



dove $H(s) = \mu \dfrac{e^{-s\tau}}{s}$ e $G(s) = 4\dfrac{1+0.25s}{1+0.4s}$.

2.1) Valutare la stabilità del sistema con $\tau = 0$ e $\mu = 5$.

Il sistema è costituito dalla connessione in serie di $G(s)$ e del sistema retroazionato con funzione di trasferimento $W(s) = \dfrac{H(s)}{1+H(s)}$. Per l'asintotica stabilità del sistema complessivo è necessario e sufficiente che questi due sottosistemi siano asintoticamente stabili. Quello descritto da $G(s)$ lo è, perché il suo unico polo è negativo. Quando $\tau = 0$ e $\mu = 5$, risulta poi $W(s) = \dfrac{5}{s+5}$ e quindi anche il sottosistema retroazionato è asintoticamente stabile. Per tali valori di τ e μ il sistema complessivo è dunque asintoticamente stabile.

2.2) Con $\tau = 0$ e $\mu = 5$, calcolare la funzione di trasferimento $F(s)$ tra $u(t)$ e $y(t)$.

$F(s) = W(s)G(s) = 4\dfrac{1+0.25s}{(1+0.2s)(1+0.4s)}$.

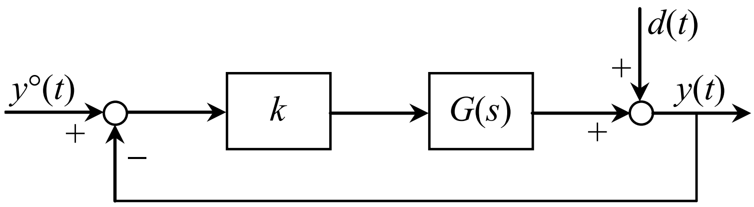
2.3) Con $\tau = 1$, dire (senza calcolare esplicitamente la risposta del sistema) se esiste un valore di μ in corrispondenza del quale l'andamento a transitorio esaurito di $y(t)$ presenta oscillazioni non smorzate quando la variabile di ingresso vale $u(t) = \mathrm{imp}(t)$.

L'uscita può presentare oscillazioni non smorzate solo se il sottosistema retroazionato viene portato al limite di stabilità. Ciò accade quando la fase critica della funzione d'anello $H(s) = \mu\dfrac{e^{-s}}{s}$ è pari a $-180°$, cioè quando $\mu = \pi/2$ (si osservi infatti che $\omega_c = \mu$ e che $\arg(L(j\omega)) = -90° - \omega\dfrac{180°}{\pi}$).

2.4) Con riferimento al punto precedente, valutare la pulsazione delle eventuali oscillazioni non smorzate che $y(t)$ presenta a transitorio esaurito.

Nella situazione discussa al punto precedente, sia la variabile v che l'uscita y presentano a regime, in risposta ad un ingresso impulsivo, un andamento oscillante con pulsazione pari al valore di $\omega_c = \pi/2$, cioè con periodo $T = 4$.

3. Si consideri il sistema retroazionato descritto dal seguente schema a blocchi,



dove $G(s) = \dfrac{10}{(s+1)^2(s+10)}$.

3.1) Dire per quali valori del parametro k è applicabile il criterio di Bode.

La funzione d'anello $L(s) = kG(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa. Inoltre, il suo diagramma di Bode del modulo taglia l'asse a 0 dB una e una sola volta dall'alto verso il basso purché $|k| > 1$. Quindi, il criterio di Bode risulta applicabile per $|k| > 1$.

3.2) Dire per quali valori del parametro k il sistema è asintoticamente stabile.

Il polinomio caratteristico in anello chiuso è pari a:

$\pi(s) = (s+1)^2(s+10) + 10k = s^3 + 12s^2 + 21s + 10(1+k)$

Tabella di Routh:

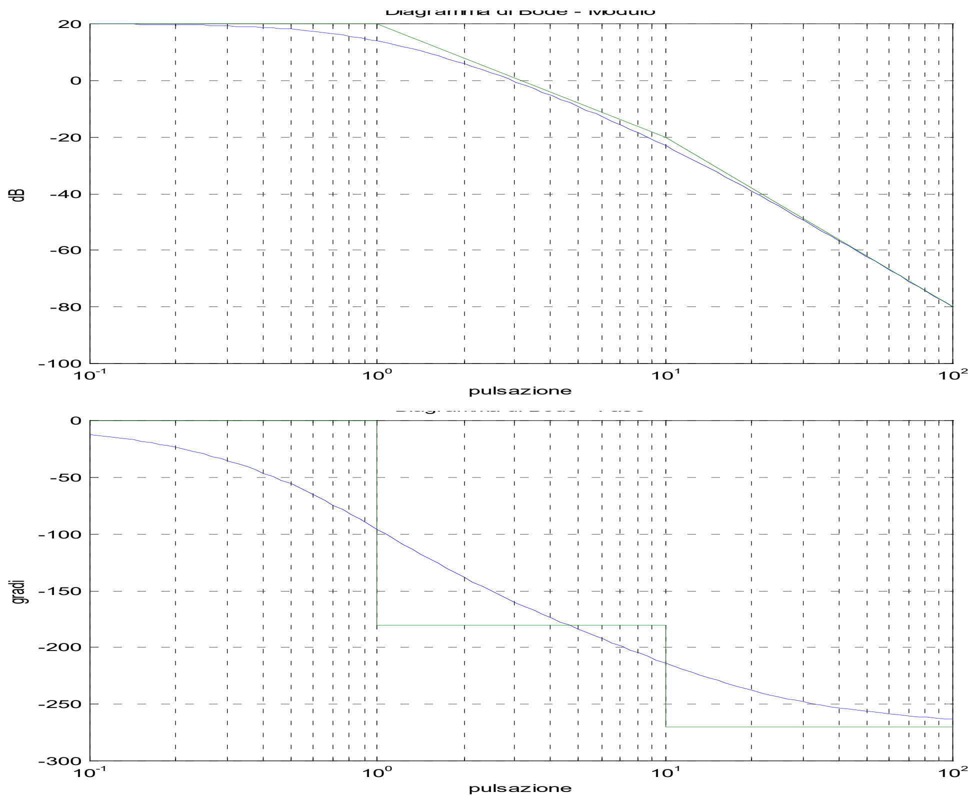
1	21
12	10(1+k)
α	0
10(1+k)	

$$\alpha = \frac{10(1+k) - 12\cdot 21}{-12} = \frac{10k - 242}{-12}$$

. Si ha asintotica stabilità per $-1 < k < 24.2$.

Si ponga ora $k = 10$.

3.3) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici relativi alla funzione d'anello.



3.4) Calcolare la pulsazione critica ω_c e il margine di fase φ_m.

La pulsazione critica è $\omega_c = 2.93$ rad/s e il margine di fase è $\varphi_m = 21.34°$.

3.5) Valutare il tempo di assestamento della risposta $y(t)$ del sistema retroazionato quando $y°(t) = \mathrm{sca}(t)$ e $d(t) = 0$.

Poiché il margine di fase è estremamente basso, i poli dominanti in anello chiuso sono complessi coniugati e caratterizzati da $\omega_n \cong \omega_c = 2.93$ rad/s, $\xi \cong \varphi_m/100 \cong 0.2$. Il tempo di assestamento è quindi dato da $t_a \cong \dfrac{5}{\xi\omega_n} \cong 8.5$ s.

4. Rispondere alle seguenti domande:

4.1) Spiegare in che cosa consiste l'approssimazione a poli dominanti.

4.2) Con riferimento ad un generico sistema retroazionato asintoticamente stabile spiegare come e perché la dinamica dominante del sistema è legata alla pulsazione critica e al margine di fase della funzione d'anello.