POLITECNICO MILANO 1863

Fondamenti di Automatica

(per Ing. Biomedica)

A.A. 2019/2020

A. Colombo, S. Formentin, L. Piroddi

27/08/2020

- Controllare il **numero di pagine** del fascicolo che deve essere di **3**.
- Durante l'esame non è possibile usare appunti, libri, etc.
- La precisione e la chiarezza delle risposte saranno oggetto di valutazione.

1. Dato il seguente sistema dinamico lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

1.1) Calcolare analiticamente il movimento libero del sistema con condizioni iniziali $x(0) = [1\ 2\ 0]^T$.

$x_1(t) = e^{-t}$
$x_2(t) = 2e^{-t} + 4te^{-t}$
$x_3(t) = 0$

1.2) Ricavare l'espressione della funzione di trasferimento $G(s)$ tra $u(t)$ e $y(t)$.

$$G(s) = \frac{2s - 6}{(s+1)^2}$$

1.3) Dire se il sistema presenta autovalori nascosti e, nel caso, specificarne il valore.

La funzione di trasferimento ha due poli, mentre il sistema è del terzo ordine. Quindi, c'è un autovalore nascosto. Gli autovalori di A sono $\{-1, -1, -10\}$, mentre i poli sono $\{-1, -1\}$. L'autovalore nascosto è pari a -10.

1.4) Alla luce della risposta precedente dire se il sistema è asintoticamente stabile, giustificando la risposta.

Sia i poli che l'autovalore nascosto sono a parte reale negativa quindi il sistema è asintoticamente stabile.

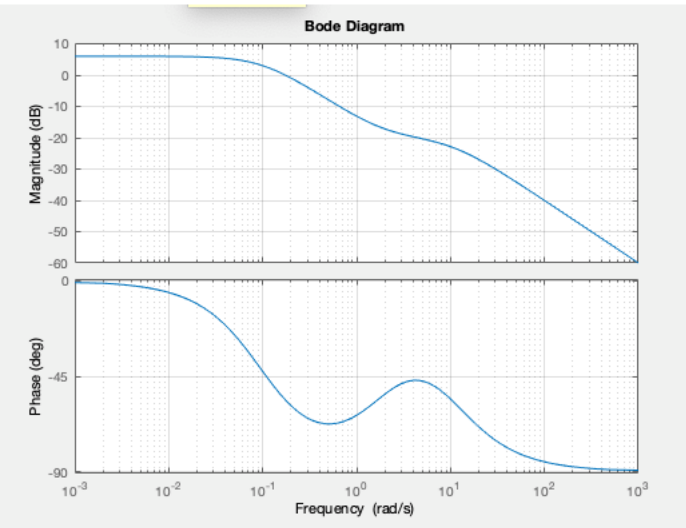
1.5) Determinare il tipo, il tempo di assestamento e il guadagno del sistema.

La funzione di trasferimento del sistema ha tipo 0, guadagno –6, tempo di assestamento 5.

2. Si consideri un sistema caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s+2}{(10s+1)(0.1s+1)}$$

2.1) Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase, asintotici ed esatti, associati a $G(s)$.



2.2) Ricavare l'espressione analitica della risposta del sistema nel tempo ad un ingresso con trasformata

$$U(s) = \frac{10s+1}{s}$$

La trasformata dell'uscita è pari a $Y(s) = \frac{s+2}{s(0.1s+1)} = \frac{10(s+2)}{s(s+10)}$.

Usando il metodo di Heaviside, possiamo scomporre la funzione razionale fratta nel modo seguente:

$$Y(s) = \frac{2}{s} + \frac{8}{s+10},$$

quindi

$$y(t) = (2 + 8e^{-10t})\,\mathrm{sca}(t).$$

2.3) Assumendo che il sistema non abbia autovalori nascosti spiegare, giustificando la risposta, se è possibile utilizzare il criterio di Bode per studiare la stabilità di un sistema retroazionato negativamente avente funzione d'anello $L(s)$ pari a $G(s)$.

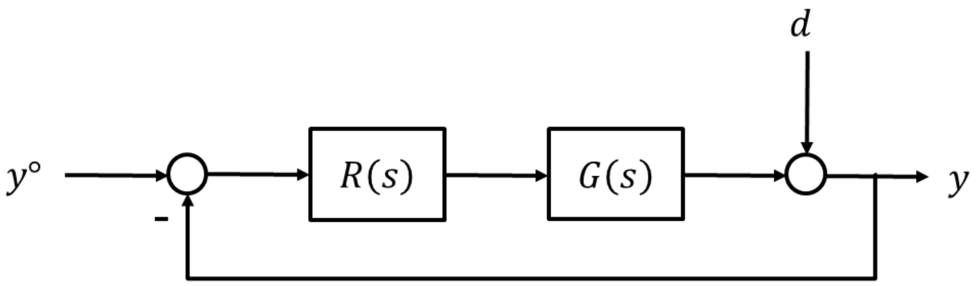
È possibile, perché:
- Per ipotesi non ci sono autovalori nascosti
- $L(s)$ non ha poli a parte reale strettamente positiva
- Il diagramma di Bode del modulo associato a $L(s)$ attraversa gli 0 dB una sola volta dall'alto verso il basso
- $\lim_{w\to\infty} L(iw) \neq -1$

2.4) Determinare l'andamento asintotico della risposta del sistema dato quando l'ingresso è $u(t) = \sin(10t)$.

Il sistema non ha poli in $\pm 10i$ (è asintoticamente stabile), e quindi risulta applicabile il teorema della risposta in frequenza:

$y = R\sin(\omega t + \phi)$ con
$R = \left|\frac{10i+2}{(100i+1)(i+1)}\right| \simeq 0.07$
$\phi = \angle \frac{10i+2}{(100i+1)(i+1)} = \text{atan}\,5 - \text{atan}\,100 - \text{atan}\,1 \simeq -0.97\, rad$

3. Si consideri il seguente schema di controllo

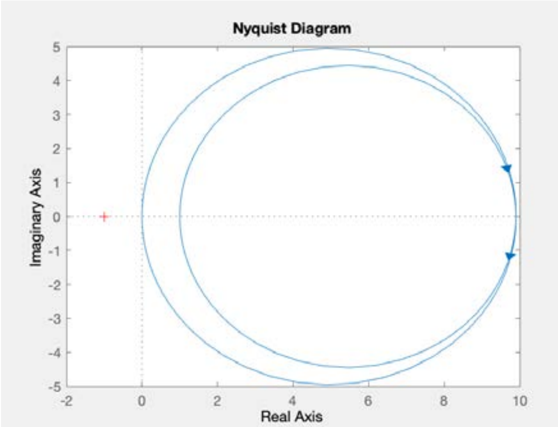


con

$$G(s) = \frac{1 + 10s}{(1+s)(1+0.01s)}$$

3.1) Tracciare il diagramma di Nyquist della funzione d'anello del sistema assumendo $R(s) = 1$.

.



3.2) Assumendo che non ci siano autovalori nascosti, dire, utilizzando il criterio di Nyquist, se il sistema in anello chiuso con $R(s) = 1$ è asintoticamente stabile. Giustificare la risposta.

Sì: tutti i poli della funzione d'anello $L(s) = R(s)G(s) = G(s)$ sono a parte reale negativa e $N = 0$.

3.3) Sempre per $R(s) = 1$, determinare se il limite per $t \to \infty$ dell'uscita in anello chiuso a fronte di un ingresso a scalino esiste ed è finito. Nel caso, valutarne il valore.

I poli del sistema in anello chiuso sono a parte reale negativa perché, come abbiamo dimostrato alla domanda precedente, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile. Possiamo quindi utilizzare il teorema del valore finale sulla funzione di trasferimento in anello chiuso $\frac{1+10s}{\frac{s^2}{100}+s(11.01)+2}$, ottenendo $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1/2$.

3.4) Dire che caratteristiche deve avere il regolatore $R(s)$ per garantire un errore nullo in anello chiuso a transitorio esaurito per un ingresso a scalino.

Per annullare l'errore dovuto a un ingresso a scalino abbiamo bisogno di una funzione d'anello di tipo 1 (principio del modello interno), quindi $R(s)$ (oltre a garantire la stabilità asintotica in anello chiuso) deve avere un polo nell'origine.

.