POLITECNICO
MILANO 1863

Fondamenti di Automatica

(per Ing. Biomedica)

A.A. 2019/2020

A. Colombo, S. Formentin, L. Piroddi

8 luglio 2020

NOME:

____

COGNOME:

____

MATRICOLA/CODICE PERSONA:

____

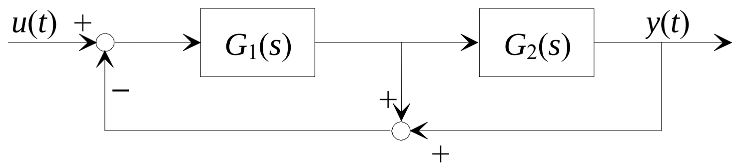
FIRMA:

____

Es. 1	**Es. 2**	**Es. 3**	**Es. 4**

- **Completare** l'intestazione della copertina del fascicolo.
- Controllare il **numero di pagine** del fascicolo che deve essere di **8** incluso questo frontespizio.
- Rispondere alle domande esclusivamente su **fogli d'esame**, nello spazio libero. Qualora non fosse sufficiente, è possibile utilizzare il retro del foglio. Qualunque altro foglio non sarà considerato.
- Durante l'esame non è possibile usare appunti, libri, **smartphone** etc.
- Non è concesso scrivere in matita.
- La **precisione** e la **chiarezza** delle risposte saranno oggetto di valutazione.

1. Si consideri il sistema descritto dal seguente schema a blocchi:



dove $G_1(s) = \dfrac{\mu}{s+1}$, $G_2(s) = \dfrac{5}{s+5}$.

1.1) Calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema complessivo.

$$G(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)[1+G_2(s)]} = \frac{5\mu}{s^2 + (6+\mu)s + (5+10\mu)}.$$

1.2) Determinare per quali valori del parametro μ il sistema è asintoticamente stabile.

Il polinomio caratteristico è $\chi(s) = s^2 + (6+\mu)s + (5+10\mu)$ ha radici a parte reale negativa se e solo se tutti i suoi coefficienti sono nonnulli e concordi, ovvero per $\mu > -0.5$.

1.3) Determinare gli eventuali valori del parametro μ per cui $G(s)$:

a) è di ordine 1,

b) ha guadagno unitario,

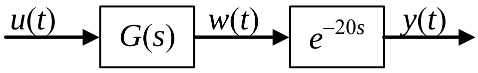
c) ha due poli coincidenti.

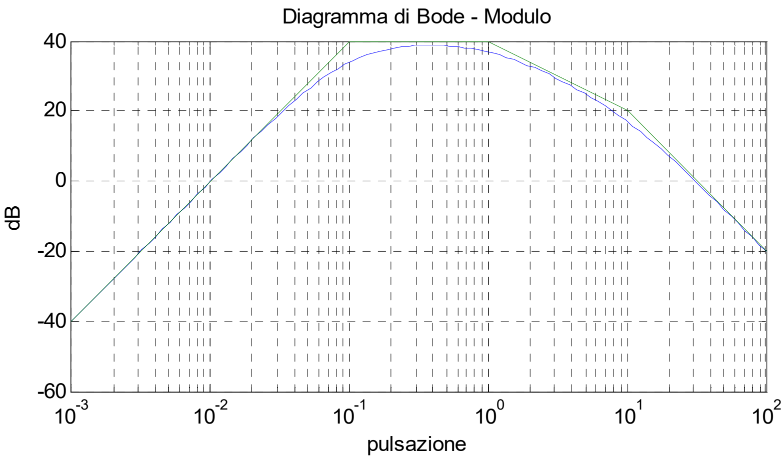
a) Non esiste alcun valore di μ per cui $G(s)$ sia di ordine 1.

b) $G(s)$ ha guadagno unitario per $\mu = -1$.

c) $G(s)$ ha due poli coincidenti in corrispondenza delle radici di $(6+\mu)^2-4(5+10\mu) = 0$, ovvero per $\mu = 27.4164$ o per $\mu = 0.5836$.

2. Si consideri il sistema descritto dallo schema a blocchi in figura, dove $G(s)$ è la funzione di trasferimento di un sistema asintoticamente stabile, con guadagno generalizzato positivo, e la cui risposta in frequenza presenta il diagramma di Bode del modulo riportato in figura.





2.1) Usando i teoremi del valore iniziale e finale (se applicabili), si discuta l'andamento della risposta $w(t)$ ad uno scalino unitario $u(t) = sca(t)$ per $t \to 0$ e $t \to \infty$. Calcolare, in particolare, $w(0)$, $\dot{w}(0)$, $\ddot{w}(0)$ e $\lim_{t\to\infty} w(t)$.

$$G(s) = \frac{10^4 s^2}{(0.1s+1)(s+1)(10s+1)^2} \;\Rightarrow\; W(s) = G(s)\cdot\frac{1}{s}$$

$$w(0) = \lim_{s\to\infty} sW(s) = \lim_{s\to\infty} G(s) = 0$$

$$\dot{w}(0) = \lim_{s\to\infty} s(sW(s) - 0) = \lim_{s\to\infty} sG(s) = 0$$

$$\ddot{w}(0) = \lim_{s\to\infty} s(s(sW(s) - 0) - 0) = \lim_{s\to\infty} s^2G(s) = 1000$$

$$\lim_{t\to\infty} w(t) = \lim_{s\to 0} sW(s) = \lim_{s\to 0} G(s) = 0$$

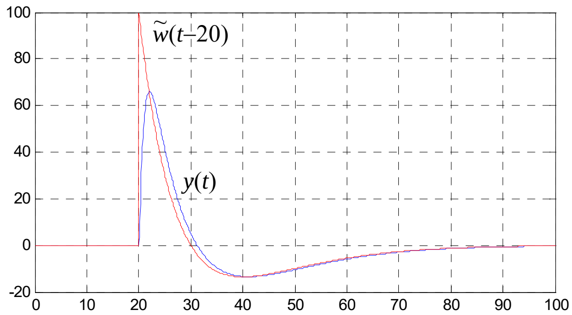
2.2) Tracciare l'andamento approssimato della risposta $y(t)$ del sistema complessivo ad uno scalino unitario $u(t) = sca(t)$ e determinarne il tempo di assestamento.

Trascurando la dinamica non dominante, si ottiene una funzione di trasferimento approssimata $\tilde{G}(s) = \dfrac{10^4 s^2}{(10s+1)^2}$, da cui $\tilde{W}(s) = \dfrac{100s}{(s+0.1)^2} = \dfrac{100}{s+0.1} - \dfrac{10}{(s+0.1)^2}$.

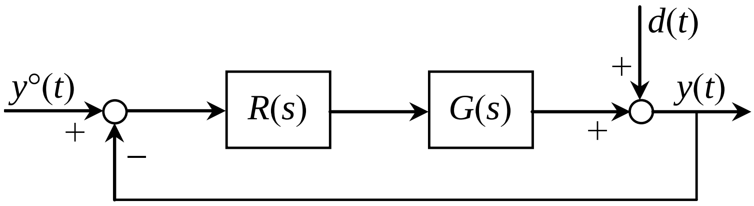
In prima approssimazione, quindi, la risposta $\tilde{w}(t)$ è data da:

$$\tilde{w}(t) = e^{-0.1t}(100sca(t) - 10ram(t)).$$

L'andamento di $y(t)$ si ottiene filtrando ulteriormente il segnale $\tilde{w}(t)$ con un filtro passa-basso (v. poli aggiuntivi di $G(s)$) e traslando la risposta di 20 s. Il tempo di assestamento è pari a $t_a = 5\cdot 10+20 = 70$.

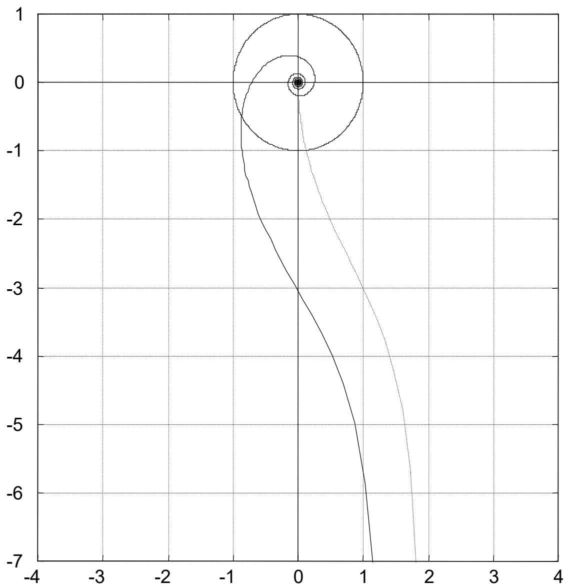


3. Si consideri il sistema retroazionato descritto dal seguente schema a blocchi,



dove $G(s) = \dfrac{2}{1+s}\, e^{-\tau s}$ e $R(s) = 2 + \dfrac{1}{s}$.

3.1) Tracciare l'andamento qualitativo del diagramma polare della funzione d'anello del sistema retroazionato nei seguenti due casi: a) $\tau = 0$, b) $\tau = 0.3$.



Funzione d'anello:

$$L(s) = \frac{2(1+2s)}{s(1+s)}\, e^{-\tau s}$$

a) linea tratteggiata: funzione d'anello senza ritardo

b) linea continua: funzione d'anello con ritardo

3.2) Con riferimento al caso (b) calcolare analiticamente la pulsazione critica ω_c e il margine di fase φ_m.

$$L(j\omega) = 2\,\frac{1 + 2j\omega}{-\omega^2 + j\omega}\, e^{-0.3j\omega}$$

Calcolo pulsazione critica: $4\,\dfrac{1 + 4\omega_c^2}{\omega_c^4 + \omega_c^2} = 1$. Ponendo $x = \omega_c^2$ si ha $x^2 - 15x - 4 = 0$.

Le radici sono $x_1 = 15.26$, $x_2 = -0.26 \rightarrow \omega_c = \sqrt{15.26} = 3.9$

$$\varphi_c = -\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}(2\omega_c) - \mathrm{arctg}(\omega_c) - 0.3\omega_c = -2.61 \text{ rad} = -150° \quad \rightarrow \quad \varphi_m = 30°$$

3.3) Valutare valore di regime e tempo di assestamento della risposta $y(t)$ del sistema retroazionato quando $y°(t) = \mathrm{sca}(t)$ e $d(t) = 0$. Dire inoltre se tale risposta presenta sovraelongazioni.

Dinamica dominante in anello chiuso: poiché φ_m è piccolo, i poli in anello chiuso risultano complessi coniugati con smorzamento piccolo ($\omega_n = 3.9$, $\xi = 0.3$)

Per effetto dell'integratore nell'anello e dell'asintotica stabilità (criterio di Bode), l'uscita tende a 1 (errore a transitorio esaurito nullo).

$$t_a = \frac{5}{\xi\omega_n} = 4.3 \text{ s}$$

$$\Delta = \exp(-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}) = 0.37 \quad \rightarrow \quad \text{sovraelongazione del } 37\%$$

3.4) Calcolare l'andamento a transitorio esaurito della risposta $y(t)$ del sistema retroazionato quando $y°(t) = \sin(0.1t)$ e $d(t) = \sin(10t)$.

$$F(0.1j) = \frac{L(0.1j)}{1 + L(0.1j)} \quad \rightarrow \quad |\cdot| = 0.9955,\ \angle = -0.05 \text{ rad}$$

$$M(10j) = \frac{1}{1 + L(10j)} \quad \rightarrow \quad |\cdot| = 0.9964,\ \angle = -0.4 \text{ rad}$$

$$y(t) \rightarrow 0.9955 \sin(0.1t-0.05) + 0.9964 \sin(10t-0.4)$$

4. Si consideri il seguente sistema non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = (1-x_1(t)^3) - 3x_2(t) + u(t)x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

4.1) Determinare gli stati di equilibrio corrispondenti a $\bar{u} = 0$.

Equazioni di equilibrio:

$$0 = \bar{x}_2$$

$$0 = (1-\bar{x}_1^3)$$

L'unico stato di equilibrio è $\bar{x} = [1\ 0]'$.

4.2) Scrivere l'espressione del sistema linearizzato associato ad un generico punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ del sistema dato.

$$\begin{cases} \delta\dot{x} = A_\delta\,\delta x + b_\delta\,\delta u \\ \delta y = c_\delta\,\delta x + d_\delta\,\delta u \end{cases}$$

$$A_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3\bar{x}_1^2 & \bar{u}-3 \end{bmatrix},\ b_\delta = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix},\ c_\delta = [\ 1\ \ 0\ ],\ d_\delta = 0.$$

4.3) Discutere la stabilità degli stati di equilibrio individuati al punto (4.1).

Si ha $A_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$. Polinomio caratteristico: $s^2 + 3s + 3$.

Per la condizione sui coefficienti, i due autovalori di A_δ sono entrambi nel semipiano sinistro. Quindi, lo stato di equilibrio è asintoticamente stabile.