POLITECNICO MILANO 1863

Fondamenti di Automatica

(per Ing. Biomedica)

A.A. 2019/2020

A. Colombo, S. Formentin, L. Piroddi

12/06/2020

- Controllare il **numero di pagine** del fascicolo che deve essere di **5**.
- Durante l'esame non è possibile usare appunti, libri, etc.
- La precisione e la chiarezza delle risposte saranno oggetto di valutazione.

1. Dato il seguente sistema dinamico lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & -100 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

1.1) Ricavare l'espressione della Funzione di Trasferimento $G(s)$ tra $u(t)$ e $y(t)$.

$$sX_2(s) = -10X_2(s) + 10U(s)$$
$$sX_3(s) = -100X_3(s) + X_2(s)$$
$$Y(s) = X_3(s)$$

Da cui si ricava:

$$G(s) = \frac{10}{(s+10)(s+100)}$$

1.2) Dopo aver esplicitato guadagno, poli, zeri e tipo di $G(s)$, tracciarne l'andamento qualitativo della risposta allo scalino.

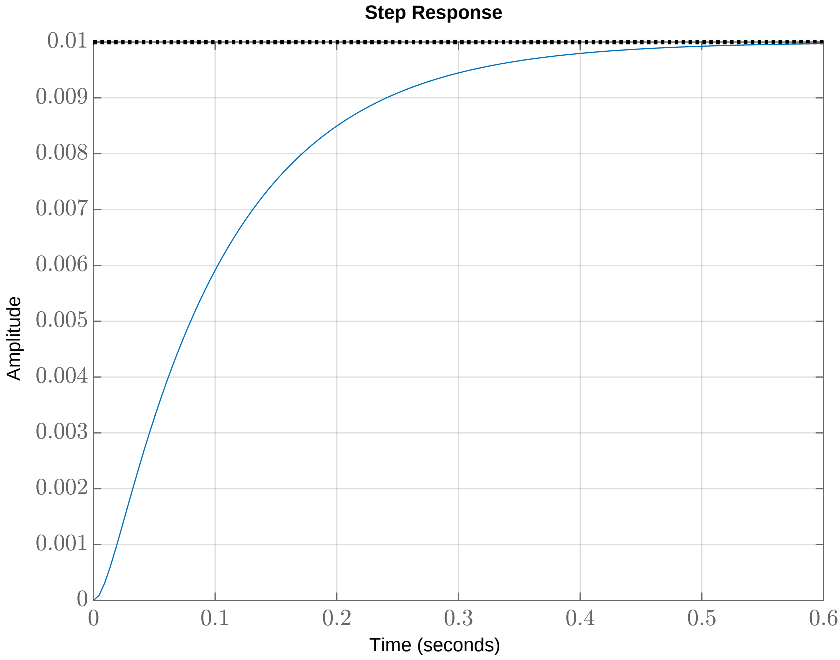
$$\mu = G(0) = 0.01$$
$$zeri: \emptyset$$
$$poli: \{-10;\ -100\}$$
$$g = 0$$

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{s} G(s) = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2}{s} G(s) = 0$$

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s} G(s) = 0.01$$

$$T_A \cong 5\frac{1}{10} = 0.5\ s$$



1.3) Determinare un'approssimazione a poli dominanti di $G(s)$, con una FdT del tipo seguente:

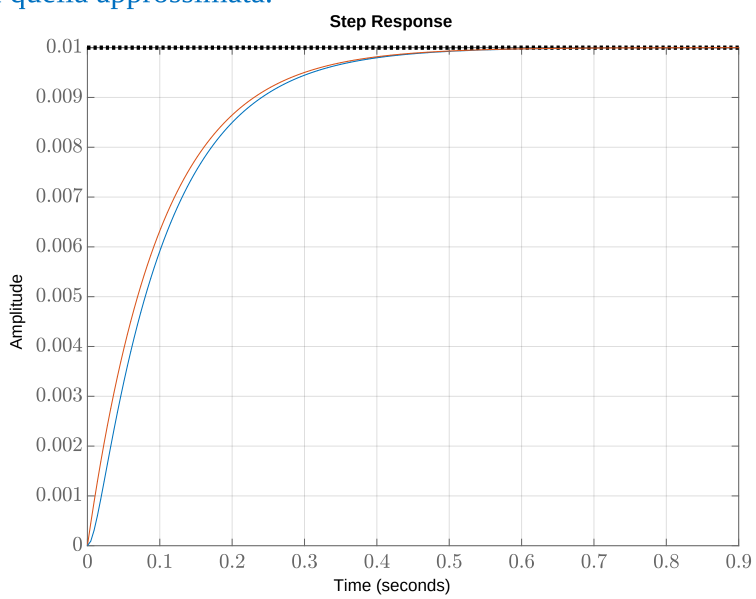
$$H(s) = \frac{\mu}{sT + 1}$$

e discutere la differenza tra la risposta allo scalino di $G(s)$ e quella di $H(s)$.

Il polo dominante è in $s = -10$. L'approssimazione deve preservare il guadagno del sistema, pari a $\mu = 0.01$. Si ottiene pertanto:

$$H(s) = \frac{0.01}{0.1s + 1}$$

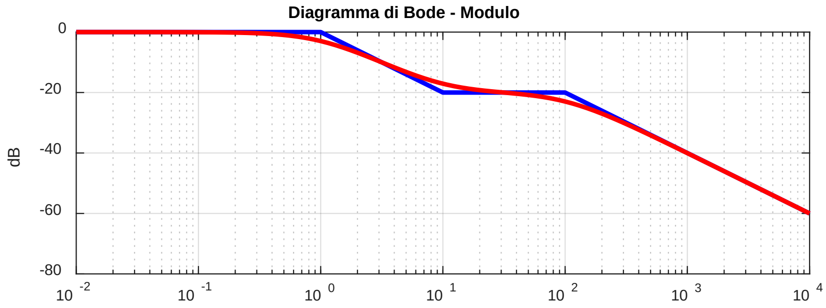
La FdT approssimata è tale da mantenere il guadagno e il tempo di assestamento di quella originale. La differenza maggiore si ha per $t \cong 0$, dove la funzione di trasferimento completa ha derivata prima nulla, a differenza di quella approssimata.

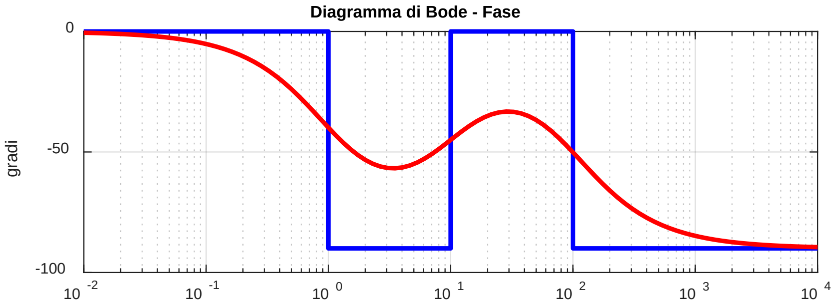


2. Data la Funzione di Trasferimento:

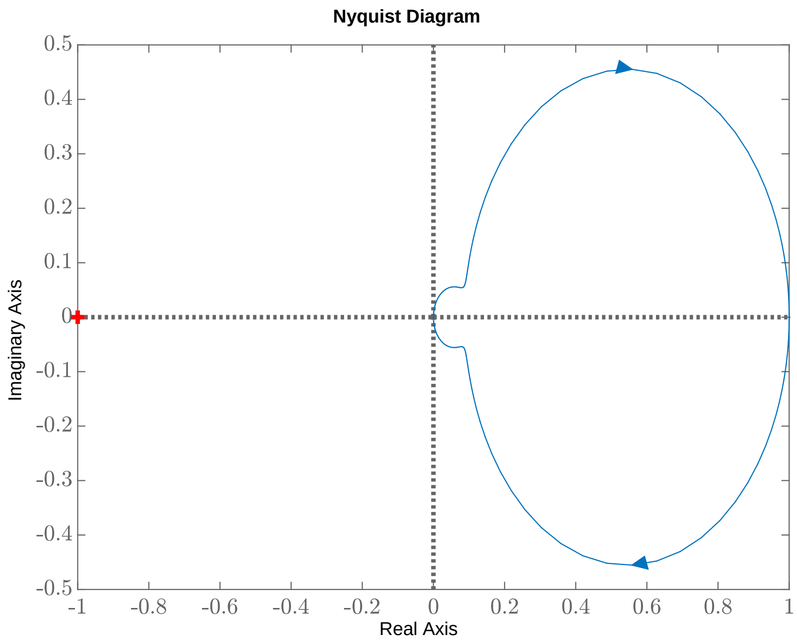
$$G(s) = 10\frac{s+10}{(s+1)(s+100)}$$

2.1) Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase, asintotici ed esatti.





2.2) Tracciare qualitativamente il diagramma di Nyquist.



2.3) Ricavare l'espressione analitica della risposta all'impulso.

Applicando il metodo di Heaviside:

$$G(s) = 10\frac{s+10}{(s+1)(s+100)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+100}$$

$$A = 10\frac{s+10}{s+100}\Big|_{s=-1} = 10\frac{9}{99} = \frac{10}{11}$$

$$B = 10\frac{s+10}{s+1}\Big|_{s=-100} = 10\frac{90}{99} = \frac{100}{11}$$

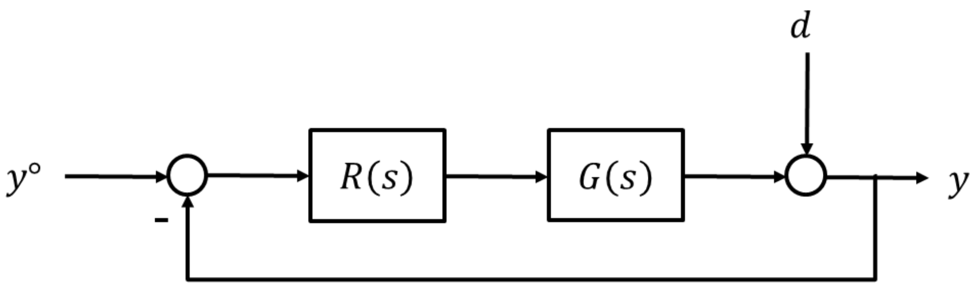
Da cui:

$$y(t) = \frac{10}{11}e^{-t} + \frac{100}{11}e^{-100t}$$

2.4) Come cambierebbe la risposta se l'ingresso fosse $u(t) = 3\text{imp}(t-2)$?

Poiché il sistema è lineare, l'uscita viene semplicemente moltiplicata per un fattore 3 e ritardata di 2 s.

3. Dato lo schema:



Dove:

$$G(s) = \frac{10}{(1+s/1000)(1+s/30)}$$

3.1) Progettare un regolatore della forma

$$R(s) = K\frac{1+\tau s}{s}$$

che garantisca:

- $y = y°$ a transitorio esaurito per $y°(t) = 3\text{sca}(t)$;
- Attenuazione di un fattore almeno 10 per disturbi $d(t) = 10\sin(\omega t)$, $\omega < 0.1\ rad/s$;
- Banda passante $\omega_c > 10\ rad/s$;
- Margine di fase almeno 80°.

L'integratore garantisce errore nullo a transitorio esaurito per riferimenti a scalino. Cancellando il polo più lento, in considerazione del fatto che il polo rimanente è molto lontano dalla banda passante richiesta, è poi possibile imporre la ω_c desiderata con margine di fase $\varphi_m \cong 90°$. Si ottiene quindi:

$$R(s) = \frac{1 + s/30}{s}$$

3.2) Valutare l'uscita a transitorio esaurito dello schema in anello chiuso in presenza dei seguenti segnali d'ingresso:
- riferimento $y°(t) = 1 + \sin(t) + \sin(100t)$
- disturbo: $d(t) = 0.01 \sin(0.01t)$

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, si considerano separatamente i contributi del riferimento e del disturbo sull'uscita. Poiché la banda passante è $\omega_c = 10\, rad/s$, dall'approssimazione delle Funzioni di Trasferimento della sensitività e della sensitività complementare si ottiene:

$$y(t) = 1 + \sin(t) + 0.01 \sin(100t - 2.36) + 10^{-5} \sin(0.01t + 1.57)$$

4. Rispondere alle seguenti domande, argomentando la trattazione in maniera chiara e sintetica.

4.1) Un sistema con retroazione negativa ha funzione d'anello $L(s)$ senza poli a parte reale positiva e modulo della risposta in frequenza sempre minore di 0 dB. Utilizzando il criterio di Nyquist e questi soli dati, si può determinare la stabilità del sistema? Perché?

TRACCIA DELLA RISPOSTA. Sì, il sistema è asintoticamente stabile in anello chiuso. Il numero di giri attorno a -1 è zero, dato che il diagramma di Nyquist rimane sempre all'interno del cerchio unitario, quindi N=P.

4.2) Quali metodi conosci per determinare la stabilità di un sistema in anello chiuso con funzione d'anello $L(s)$ nota e di ordine 1? (elencali tutti e descrivili brevemente).

TRACCIA DELLA RISPOSTA. Metodi: criterio di Nyquist, criterio di Bode, tabella di Routh, condizione necessaria e sufficiente per polinomi di grado fino a 2. Si veda il materiale didattico per i dettagli.