POLITECNICO
MILANO 1863

Fondamenti di Automatica

(per Ing. Biomedica)

A.A. 2019/2020

A. Colombo, S. Formentin, L. Piroddi

5 febbraio 2020

NOME:

____

COGNOME:

____

MATRICOLA/CODICE PERSONA:

____

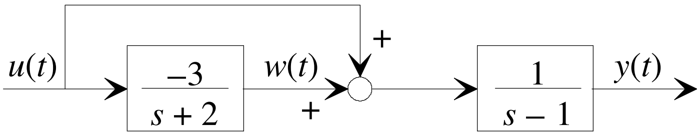
FIRMA:

____

Es. 1	Es. 2	Es. 3

- **Completare** l'intestazione della copertina del fascicolo.
- Controllare il **numero di pagine** del fascicolo che deve essere di **8** incluso questo frontespizio.
- Rispondere alle domande esclusivamente su **fogli d'esame**, nello spazio libero. Qualora non fosse sufficiente, è possibile utilizzare il retro del foglio. Qualunque altro foglio non sarà considerato.
- Durante l'esame non è possibile usare appunti, libri, **smartphone** etc.
- Non è concesso scrivere in matita.
- La **precisione** e la **chiarezza** delle risposte saranno oggetto di valutazione.

1. Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dal seguente schema a blocchi:



1.1) Utilizzando $w(t)$ e $y(t)$ come variabili di stato, descrivere tale sistema dinamico in forma di stato. Evidenziare le matrici A, B, C, D del sistema.

$$W(s) = -\frac{3}{s+2}\,U(s) \quad \rightarrow \quad \dot{w}(t) = -\,2w(t) - 3u(t)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s-1}\,[U(s) + W(s)] \quad \rightarrow \quad \dot{y}(t) = y(t) + w(t) + u(t)$$

$x_1(t) = w(t)$, $x_2(t) = y(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) - 3u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [\ 0 \quad 1\ ]\,,\ D = 0$$

1.2) Determinare l'ordine del sistema e dire se coincide con l'ordine della funzione di trasferimento dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$. Mostrare inoltre che l'insieme dei poli della funzione di trasferimento è *strettamente* contenuto nell'insieme degli autovalori del sistema.

$G(s) = \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{3}{s+2}\right) = \frac{1}{s-1}\,\frac{s-1}{s+2} = \frac{1}{s+2}$ $\rightarrow$ ordine sistema = 2, ordine fdt = 1

autovalori = $\{-2, 1\}$, poli = $\{-2\}$

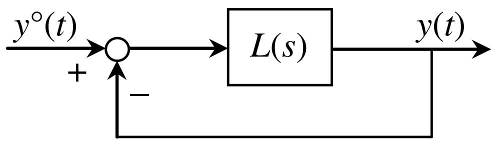
1.3) Dire, giustificando la risposta, se il sistema complessivo è asintoticamente stabile.

Il sistema è instabile per la presenza di un autovalore nel semipiano destro.

1.4) Mostrare che per ogni ingresso $u(t)$, $t \geq 0$, il legame tra i movimenti forzati di $w(t)$ e $y(t)$ è $w(t) = -3\,y(t)$, $\forall\, t \geq 0$.

$W(s) = -\frac{3}{s+2}\,U(s)$, $Y(s) = \frac{1}{s+2}\,U(s)$ $\rightarrow$ $W(s) = -3\,Y(s)$ $\rightarrow$ $w(t) = -3\,y(t)$, $\forall t$.

2. Si consideri il sistema retroazionato descritto dal seguente schema a blocchi,



dove $L(s) = \mu \dfrac{e^{-\tau s}}{s}$.

2.1) Si ponga $\tau = 0$ e si calcolino la pulsazione critica e il margine di fase della funzione $L(s)$ al variare di $\mu > 0$.

$\omega_c = \mu$, $\varphi_m = 90°$.

2.2) Sempre in corrispondenza di $\tau = 0$, si discuta al variare di $\mu > 0$ l'andamento dell'uscita $y(t)$ quando $y°(t) = \mathrm{sca}(t)$.

$F(s) = \dfrac{\mu}{s+\mu} \quad \rightarrow \quad y(t) = (1-e^{-\mu t})\mathrm{sca}(t)$

Al crescere di μ, diminuisce la costante di tempo associata a $F(s)$ e la risposta risulta più veloce.

2.3) Con $\mu = 100$, determinare il massimo valore del ritardo τ che si può tollerare prima che il sistema perda la proprietà di asintotica stabilità.

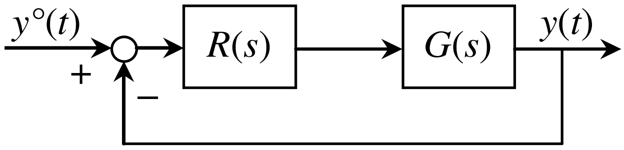
La fase dovuta al ritardo è pari a $-\omega_c\tau\,\dfrac{180°}{\pi} = -100\,\tau\,\dfrac{180°}{\pi}$.

L'asintotica stabilità del sistema si perde se $-100\,\tau\,\dfrac{180°}{\pi} = -90° \quad\rightarrow\quad \tau = \dfrac{\pi}{200}$.

2.4) Con $\tau = 10$, determinare il massimo valore del guadagno μ che si può tollerare prima che il sistema perda la proprietà di asintotica stabilità.

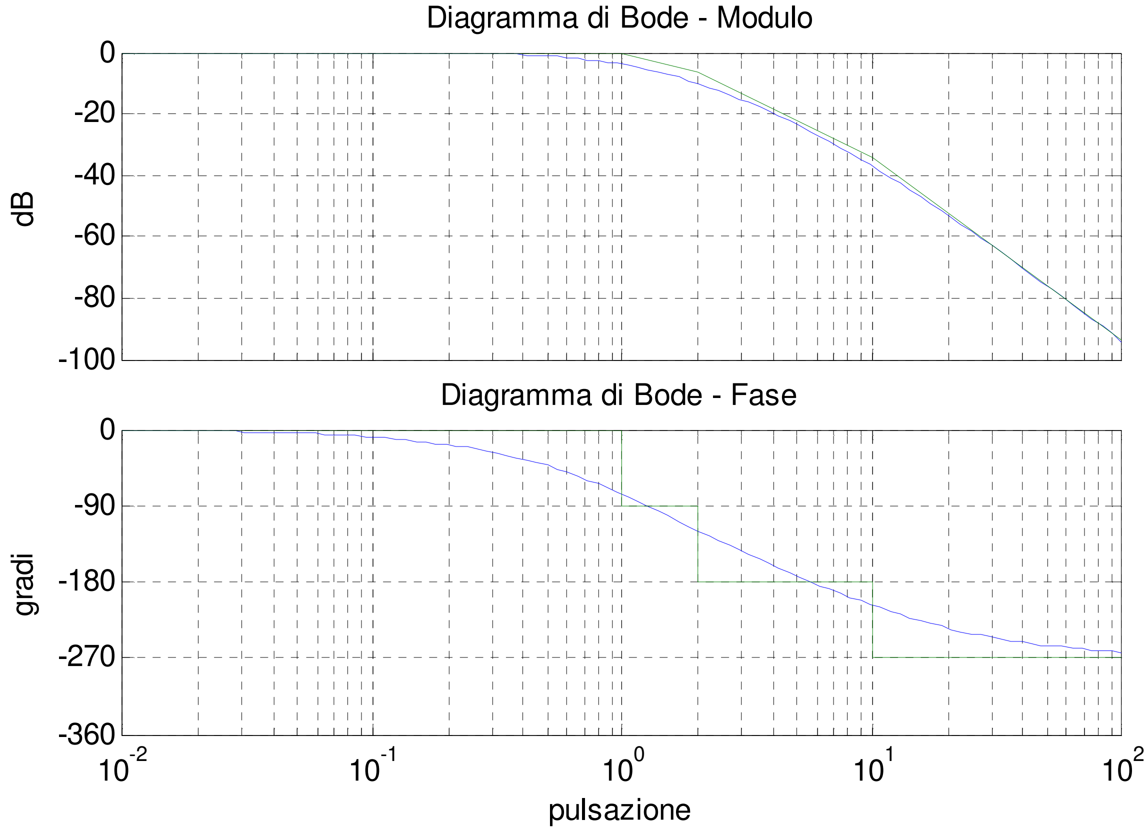
L'asintotica stabilità del sistema si perde se $-10\,\mu\,\dfrac{180°}{\pi} = -90° \quad\rightarrow\quad \mu = \dfrac{\pi}{20}$.

3. Si consideri il sistema descritto dal seguente schema a blocchi:



dove $G(s) = \dfrac{20}{(s+1)(s+2)(s+10)}$ e il regolatore $R(s)$ è al più di ordine 2.

3.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici di modulo e fase della funzione di trasferimento $G(s)$. Tracciare inoltre l'andamento qualitativo dei corrispondenti diagrammi reali.



3.2) Determinare il tipo e il guadagno del regolatore $R(s)$ in modo che l'errore a transitorio esaurito in presenza di un segnale di riferimento $y°(t) = \mathrm{ram}(t)$ soddisfi la condizione $|e_\infty| \leq 0.2$.

Per avere errore a transitorio esaurito limitato è sufficiente prendere un regolatore di tipo 1.

Infatti, in tal caso:

$$e_{y°}(\infty) = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1 + 1\cdot\frac{\mu_R}{s}} \frac{1}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+\mu_R} = \frac{1}{\mu_R}$$

Si noti che il teorema del valore finale si può applicare nel caso in esame nell'ipotesi che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile (ipotesi da verificare a posteriori, a progetto ultimato). Infine, risulta $e_{y°}(\infty) \leq 0.2$ se $\mu_R \geq 5$. Prendendo un margine di robustezza scegliamo $\mu_R = 10$.

3.3) Determinare i rimanenti parametri di $R(s)$ (al più di ordine 2) in modo che $\omega_c \geq 7$ rad/s e $\varphi_m \geq 40°$. Utilizzare la carta semilogaritmica riportata in basso per il tracciamento della funzione d'anello. Riportare esplicitamente i valori di ω_c e φ_m ottenuti.

Dovendo progettare un regolatore al più di ordine 2, si hanno a disposizione due zeri e un ulteriore polo (in aggiunta a quello nell'origine), per una funzione di trasferimento con la struttura seguente:

$$R(s) = \mu_R \frac{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}{s(1+\tau s)}$$

dove $\mu_R = 10$. Gli zeri del regolatore si possono tarare per cancellazione dei poli più in bassa frequenza di $G(s)$: $T_1 = 1$, $T_2 = 0.5$. La funzione d'anello risultante è

$$L(s) = \frac{10}{s(1+0.1s)(1+\tau s)}$$

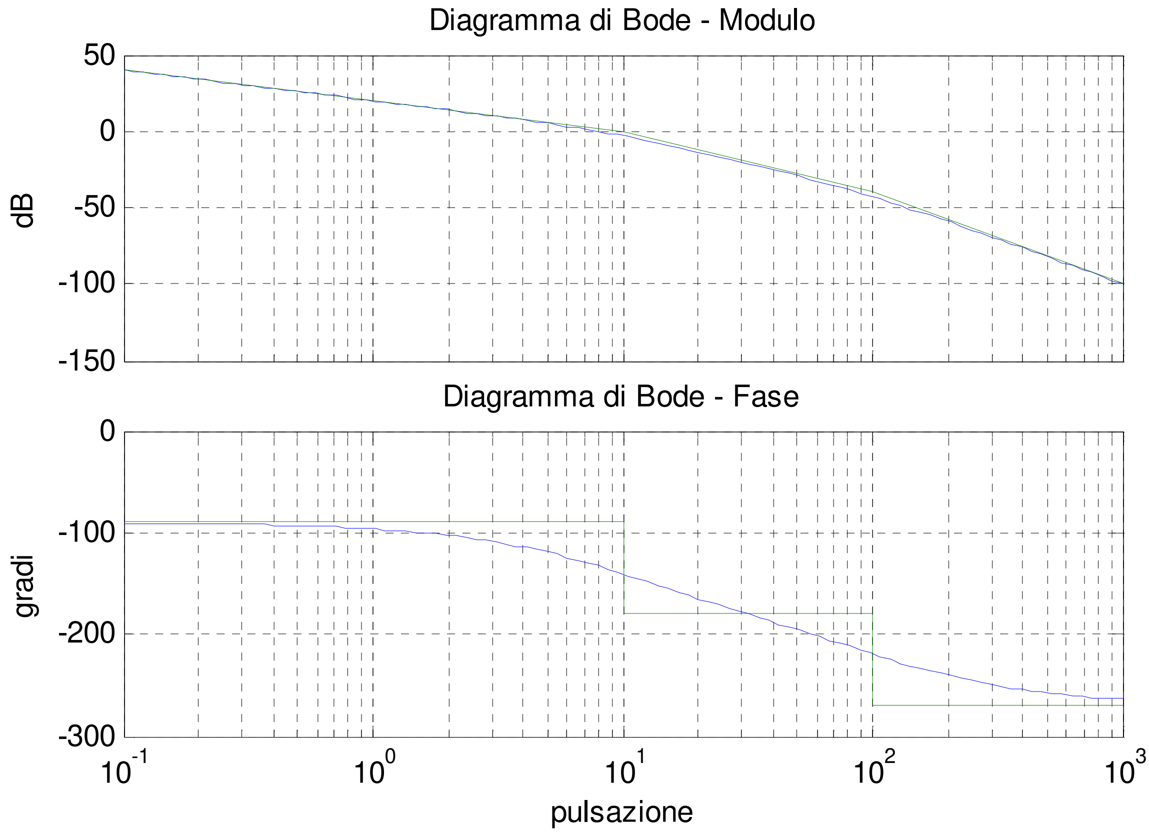
Per $\tau = 0$, tale funzione d'anello avrebbe $\omega_c \cong 10$ rad/s, $\varphi_m \cong 45°$ (dal diagramma asintotico; i valori esatti sono rispettivamente $\omega_c = 7.86$ rad/s e $\varphi_m = 51.8°$). Il secondo polo (che va incluso obbligatoriamente per la realizzabilità del regolatore), va inserito ad una pulsazione sufficientemente più grande di ω_c da non influire significativamente sul suo valore e da ridurre solo marginalmente il margine di fase.

Per esempio, con $\tau = 0.01$ (una decade dopo ω_c), il degrado di fase atteso è di circa 4.5°.

In conclusione il regolatore progettato è il seguente:

$$R(s) = 10\ \frac{(1+s)(1+0.5s)}{s(1+0.01s)}$$

che determina una funzione d'anello con $\omega_c = 7.84$ rad/s e $\varphi_m = 47.4°$.



3.4) Tracciare qualitativamente la risposta del sistema retroazionato ad uno scalino unitario, mettendone in evidenza le caratteristiche fondamentali (tempo di assestamento, valore asintotico, eventuali oscillazioni, massima sovraelongazione relativa).

I poli dominanti del sistema in anello chiuso sono in prima approssimazione complessi coniugati con $\omega_n = 7.84$ rad/s e $\xi = 0.47$, mentre il guadagno μ_F della funzione di sensitività complementare $F(s) = \dfrac{L(s)}{1+L(s)}$ è esattamente uguale a 1 (grazie al polo nell'origine della funzione d'anello).

La risposta a scalino è pertanto quella di un sistema del secondo ordine con guadagno unitario, senza zeri e con due poli complessi coniugati, con i seguenti parametri caratteristici:

$t_a \cong \dfrac{5}{\xi\omega_n} = 1.3569$ s, $T = \dfrac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 0.908$ s, $\Delta = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} = 0.1877$