POLITECNICO
MILANO 1863

Fondamenti di Automatica

(per Ing. Biomedica)

A.A. 2019/2020

A. Colombo, S. Formentin, L. Piroddi

14 gennaio 2020

NOME:

___

COGNOME:

___

MATRICOLA/CODICE PERSONA:

___

FIRMA:

___

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5

- **Completare** l'intestazione della copertina del fascicolo.
- Controllare il **numero di pagine** del fascicolo che deve essere di **8** esclusa questa copertina.
- Rispondere alle domande esclusivamente sui **fogli d'esame**, nello spazio libero. Qualora non fosse sufficiente, è possibile utilizzare il retro del foglio. Qualunque altro foglio non sarà considerato.
- Durante l'esame non è possibile usare appunti, libri, **smartphone** etc.
- Non è concesso scrivere in matita.
- La precisione e la chiarezza delle risposte saranno oggetto di valutazione.

1. Si consideri il seguente sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)\big(1 - x_1(t)\big) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_1(t)u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

1.1) Calcolare gli stati e le uscite di equilibrio per ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 1$.

Fissando $\dot{x}(t) = 0$ otteniamo 2 soluzioni di equilibrio:

$\bar{x}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\bar{y}_A = 0$

$\bar{x}_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\bar{y}_B = 3$

1.2) Per $u(t) = \bar{u} = 1$, valutare la stabilità dei punti di equilibrio.

La matrice dinamica generica del sistema linearizzato è $A_\delta = \begin{bmatrix} 1-2\bar{x}_1 & 1 \\ 1+\bar{u} & -1 \end{bmatrix}$.

In particolare, il sistema linearizzato nel punto A ha matrice dinamica $A_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, che ha traccia nulla e determinante negativo, e quindi ha almeno un autovalore a parte reale positiva. Pertanto, per il teorema 2 sulla stabilità dei punti di equilibrio, lo stato di equilibrio A è instabile.

Il sistema linearizzato nel punto B ha matrice dinamica $A_\delta = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, che ha traccia negativa e determinante positivo, e quindi ha entrambi gli autovalori a parte reale negativa. Pertanto, per il teorema 1 sulla stabilità dei punti di equilibrio, lo stato di equilibrio B è asintoticamente stabile.

1.3) Calcolare la funzione di trasferimento da $u(t)$ a $y(t)$ per il sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio strettamente positivo.

Il punto di equilibrio A è definito da un vettore di stato nullo, e quindi va scartato.

Il sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio B è

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} u(t)$$

che possiamo riscrivere nel dominio delle trasformate come

$$sX(s) = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} X(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} U(s)$$

dove abbiamo posto $x(0) = 0$, per il calcolo della funzione di trasferimento.

Risolvendo rispetto a $X(s)$, e considerando che $y(t) = x_1(t)$, otteniamo

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3}{s^2 + 6s + 3}$$

1.4) Calcolare l'ampiezza dell'oscillazione di y osservata, a transitorio esaurito, a fronte di un ingresso $u(t) = 1 + \epsilon \sin(t)$, per ϵ molto piccolo e per condizioni iniziali $x(0) = (3{,}6)$.

Alle condizioni iniziali date e con $u(t) = 1$, il sistema non lineare si trova all'equilibrio . La componente sinusoidale dell'ingresso rappresenta quindi una (piccola) perturbazione rispetto alla condizione di equilibrio, $\delta u(t) = \varepsilon \sin(t)$. La variazione $\delta y(t)$ dell'uscita rispetto alle condizioni di equilibrio può essere dunque valutata calcolando la risposta del sistema linearizzato intorno al punto di equilibrio B all'ingresso $\delta u(t)$.

Ricordandoci che tale sistema è asintoticamente stabile, possiamo utilizzare il teorema della risposta in frequenza per valutare l'ampiezza dell'oscillazione in uscita, che sarà pari a ϵ moltiplicata per

$$|G(j\omega)| = \frac{3}{|-1 + 6j + 3|} = \frac{3}{\sqrt{4+36}} = \frac{3}{\sqrt{40}}$$

2. Si consideri il sistema lineare tempo-invariante definito dalla funzione di trasferimento parametrica

$$F(s) = \frac{s+1}{s^5 + s^4 + 3s^3 + s^2 + s + p}$$

2.1) Assumendo che il sistema non abbia autovalori nascosti a parte reale nulla o positiva, calcolare i valori di p per cui il sistema è asintoticamente stabile.

Possiamo utilizzare il criterio di Routh Hurwitz:

	1	3	1	0
	1	1	p	0
	2	$1-p$	0	
	$\frac{1+p}{2}$	p	0	
	$\frac{1-4p-p^2}{1+p}$	0		
	p			

Ne deduciamo che p deve soddisfare le seguenti diseguaglianze:

$p > -1$

$p > 0$

$-2-\sqrt{5} < p < -2+\sqrt{5}$

Intersecando i tre intervalli (aperti) otteniamo

$0 < p < -2+\sqrt{5}$

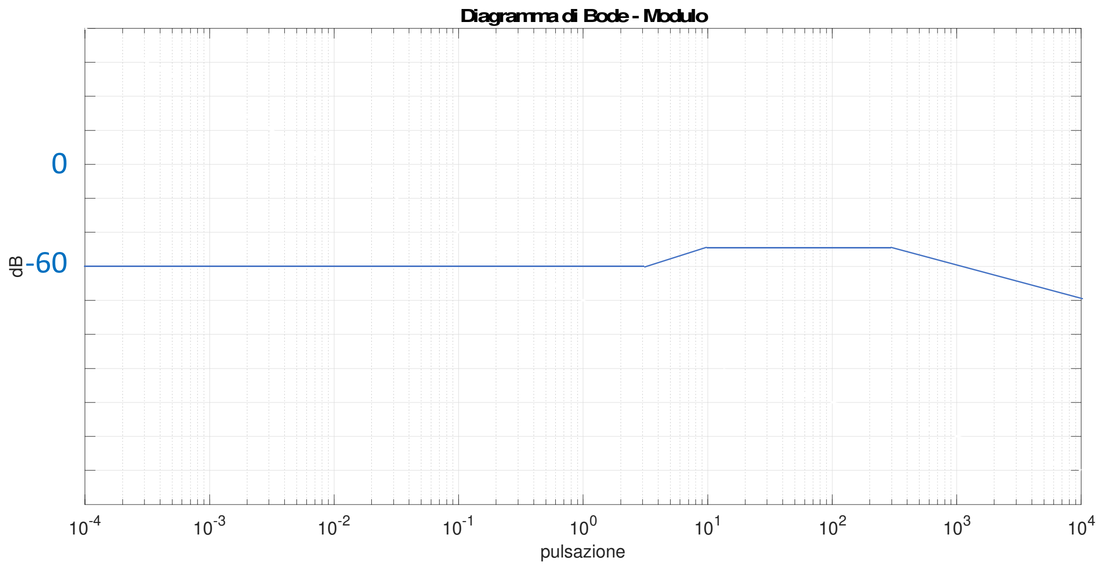
2.2) Calcolare il guadagno del sistema al variare di $p > 0$.

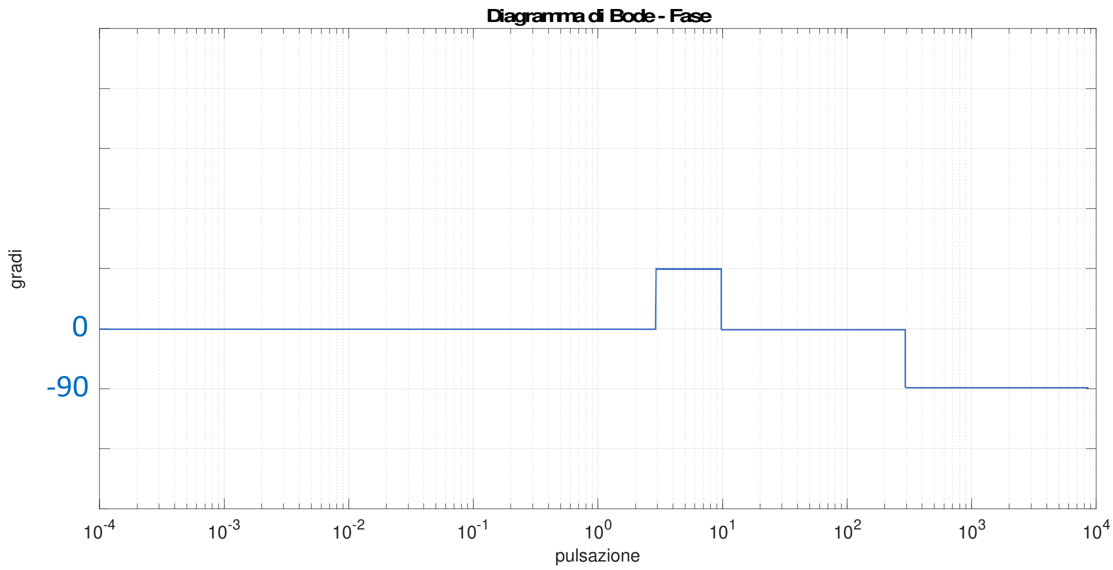
$$\mu = \lim_{s \to 0} F(s) = \frac{1}{p}$$

3. Si consideri un sistema con la seguente funzione di trasferimento

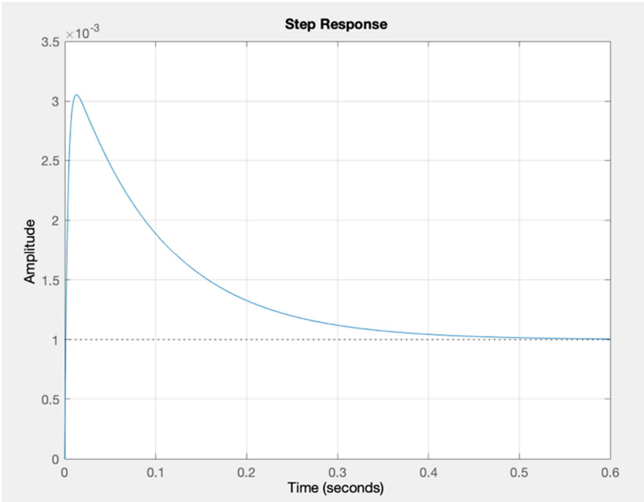
$$F(s) = \frac{s+3}{(s+10)(s+300)}$$

3.1) Tracciare i diagrammi asintotici di modulo e fase della risposta in frequenza del sistema.





3.2) Tracciare l'andamento qualitativo della risposta allo scalino di ampiezza unitaria del sistema dato.



Si noti la sovraelongazione dovuta a uno zero dominante.

3.3) Ricavare l'espressione analitica nel dominio del tempo della risposta del sistema ad uno scalino di ampiezza unitaria.

Utilizziamo il metodo di Heaviside:

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+10)(s+300)}\frac{1}{s} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+10} + \frac{\alpha_3}{s+300}$$

Antitrasformando, si ha:

$$y(t) = \left(\alpha_1 + \alpha_2 e^{-10t} + \alpha_3 e^{-300t}\right) \operatorname{sca}(t)$$

I parametri α_1, α_2 e α_3 si trovano imponendo la seguente uguaglianza:

$$s+3 = \alpha_1(s+10)(s+300) + \alpha_2 s(s+300) + \alpha_3 s(s+10) =$$

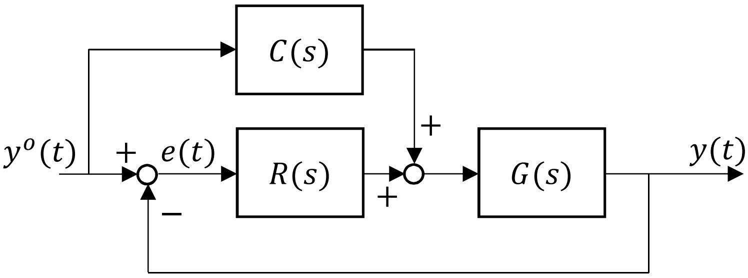
$$= (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)s^2 + (310\alpha_1+300\alpha_2+10\alpha_3)s + 3000\alpha_1$$

ovvero risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0 \\ 310\alpha_1+300\alpha_2+10\alpha_3 = 1 \\ 3000\alpha_1 = 3 \end{cases}$$

da cui si ottiene $\alpha_1 = \frac{1}{1000}$, $\alpha_2 = \frac{7}{2900}$, $\alpha_3 = -\frac{99}{29000}$

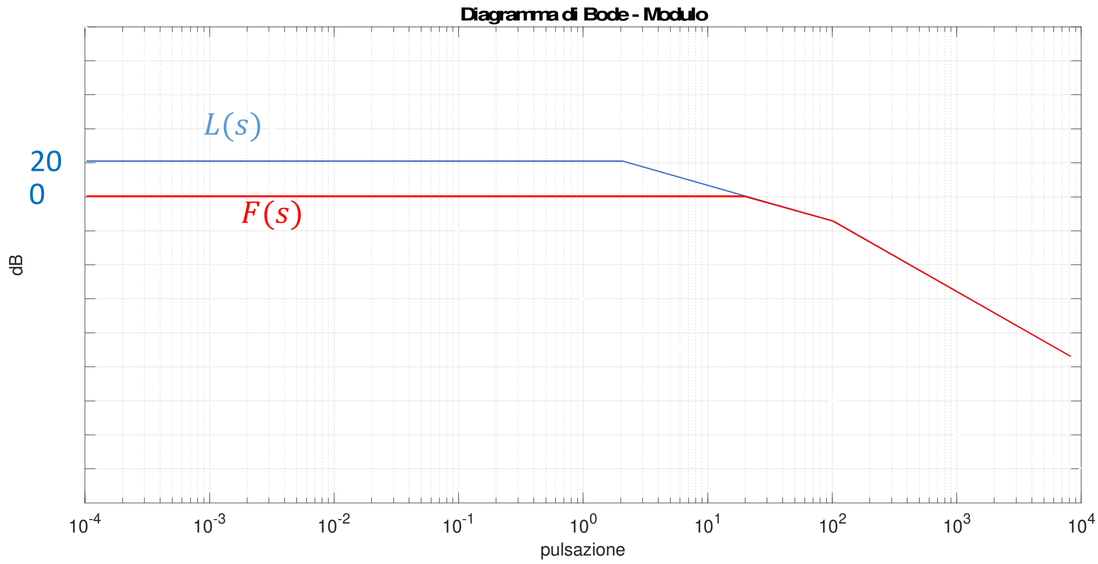
4. Si consideri il seguente sistema retroazionato

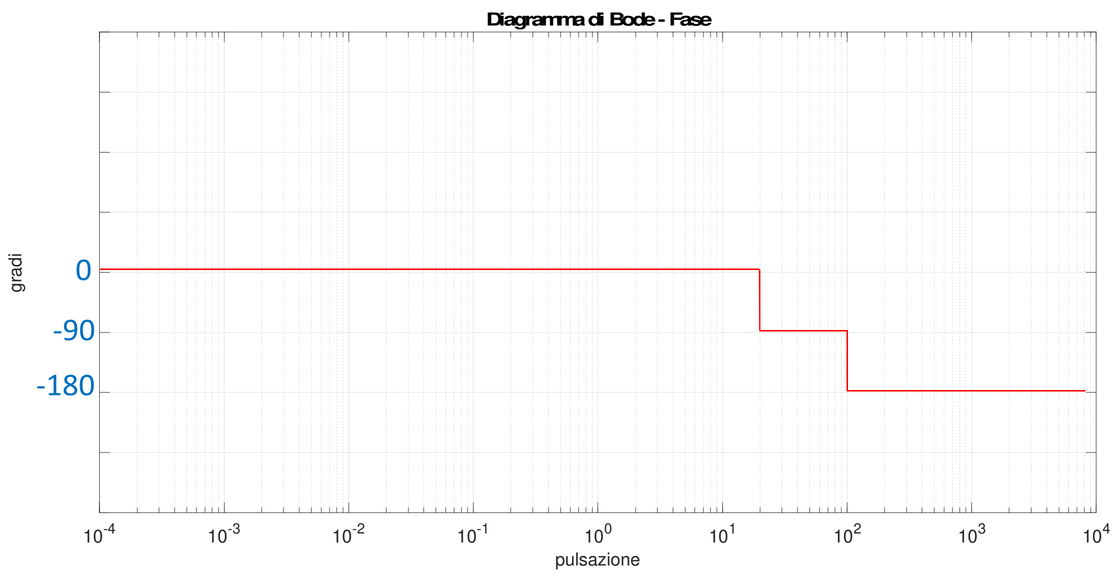


4.1) Ricavare la funzione di trasferimento d'anello, assumendo $R(s) = 10$ e $G(s) = \frac{200}{(s+2)(s+100)}$.

$$L(s) = \frac{2000}{(s+2)(s+100)}$$

4.2) Tracciare il diagramma di Bode approssimato associato alla funzione di trasferimento in anello chiuso $F(s)$ da $y^o(t)$ a $y(t)$, assumendo $C(s) = 0$.





4.3) Sempre assumendo $C(s) = 0$, rispondere alle seguenti domande (giustificando le risposte):

- Il sistema in anello chiuso presenta oscillazioni in uscita, a fronte di un segnale di ingresso a scalino?

Il margine di fase è $180° - \text{atan}(10) - \text{atan}\left(\frac{20}{100}\right) \cong 85°$, e quindi non ci aspettiamo oscillazioni in uscita.

- Quanto vale il tempo di assestamento in anello chiuso?

La pulsazione critica è 20, quindi il tempo di assestamento è $\frac{5}{20} = 0.25$.

- Quanto vale asintoticamente il modulo dell'errore in anello chiuso, a fronte di un segnale di riferimento $y^o(t)$ a scalino di ampiezza unitaria?

In anello chiuso ci aspettiamo un errore asintotico $\lim_{t\to\infty} |e(t)| = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+L(s)} = \frac{1}{11}$

4.4) Progettare il compensatore $C(s)$ per rendere nullo l'errore asintotico a fronte di un ingresso a scalino.

Introducendo il blocco $C(s)$ la funzione di trasferimento da $y^o(t)$ ad $e(t)$ diventa $\frac{1-C(s)G(s)}{1+L(s)}$. Per soddisfare la specifica possiamo imporre

$$\lim_{s\to 0} \frac{1-C(s)G(s)}{1+L(s)} = 0,$$

quindi $C(0)G(0) = 1$. Otteniamo

$$C(0) = \frac{1}{G(0)} = 1$$

Per semplicità possiamo prendere $C(s) = C(0) = 1$.

5. Enunciare con precisione il criterio di Bode.

Vedi appunti