1. Si consideri il seguente sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\sqrt{x_1(t)} + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

1.1) Calcolare lo stato e l'uscita di equilibrio associati all'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 1$, $\forall t \geq 0$.

$$\begin{cases} 0 = -\sqrt{\bar{x}_1} + \bar{x}_2 \\ 0 = -\bar{x}_2 + 1 \\ \bar{y} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \bar{x}_2 = 1 \\ -\sqrt{\bar{x}_1} = -1 \Rightarrow \bar{x}_1 = 1 \\ \bar{y} = 1 + 1 = 2 \end{array}$$

1.2) Valutare la stabilità del punto di equilibrio calcolato al punto precedente.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\bar{x}_1}} = -\frac{1}{2} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La matrice A è triangolare e quindi gli autovalori sono:

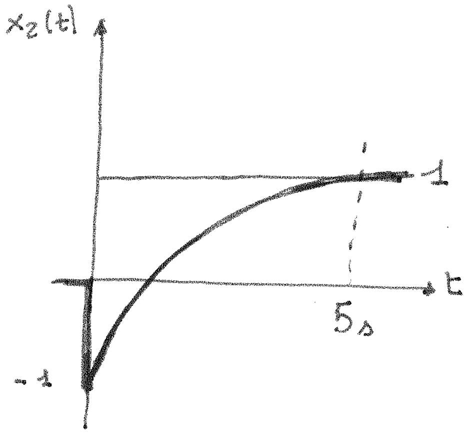
$\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = -1$

da cui il pto di equilibrio ricavato è stabile.

1.3) Determinare l'espressione analitica del movimento di $x_2(t)$ del sistema dato, considerando un ingresso a scalino di ampiezza unitaria e le seguenti condizioni iniziali delle variabili di stato: $x_1(0) = 2$ e $x_2(0) = -1$. Fornire una rappresentazione grafica di $x_2(t)$.

$$x_2(t) = -1 \cdot e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau = -e^{-t} + \int_0^t e^{-t} \cdot e^{\tau} d\tau = -e^{-t} + e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau =$$

$$= -e^{-t} + e^{-t}\left[e^{t} - 1\right] = -e^{-t} + 1 - e^{-t} = 1 - 2e^{-t}$$



2. Si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha \cdot x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - 10x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = -x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) + u(t) \\ y(t) = x_3(t) \end{cases}$$

2.1) Dire, giustificando la risposta, per quali valori di α il sistema è asintoticamente stabile.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & -10 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ La matrice A è triangolare perciò gli autovalori sono $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = -10$ e $\lambda_3 = -1$.

$\Rightarrow$ Il sistema è asintoticamente stabile per valori di $\alpha < 0$.

2.2) Per $\alpha = -1$, ricavare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema con ingresso u ed uscita y.

$$\begin{cases} sX_1 = -X_1 \\ sX_2 = X_1 - 10X_2 \\ sX_3 = -X_1 + X_2 - X_3 + U(s) \end{cases}$$

$X_1 = 0$

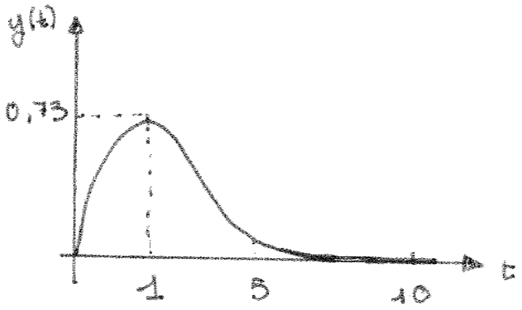
$X_2 = 0$

$(s+1)X_3 = U(s)$, $X_3 = \dfrac{1}{(s+1)} \cdot U(s)$

$y(s) = \dfrac{1}{(1+s)} \cdot U(s)$

2.3) Tracciare qualitativamente la risposta all'ingresso $u(t) = 2e^{-t}sca(t)$, evidenziando valore iniziale e finale, tempo di assestamento ed eventuali sovraelongazioni.

$$y(s) = \frac{1}{1+s} \cdot 2 \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{2}{(1+s)^2} \Rightarrow y(t) = 2te^{-t}sca(t)$$



$$\dot{y}(t) = 2e^{-t} + 2te^{-t}(-1)$$

$$t = 0 : \dot{y}(0) = 2$$

$$\dot{y}(t) = 0$$

$$2e^{-t} - 2e^{-t}t = 0$$

$$2e^{-t}(1-t) = 0$$

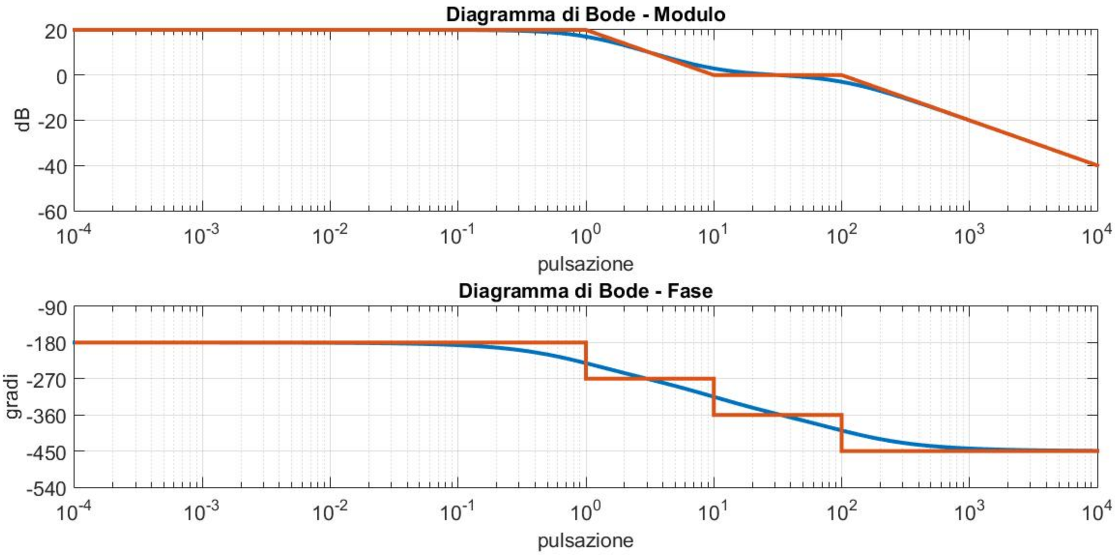
$$t_{max} = 1$$

$$y(1) = 2e^{-1} = \frac{2}{e} = 0,73$$

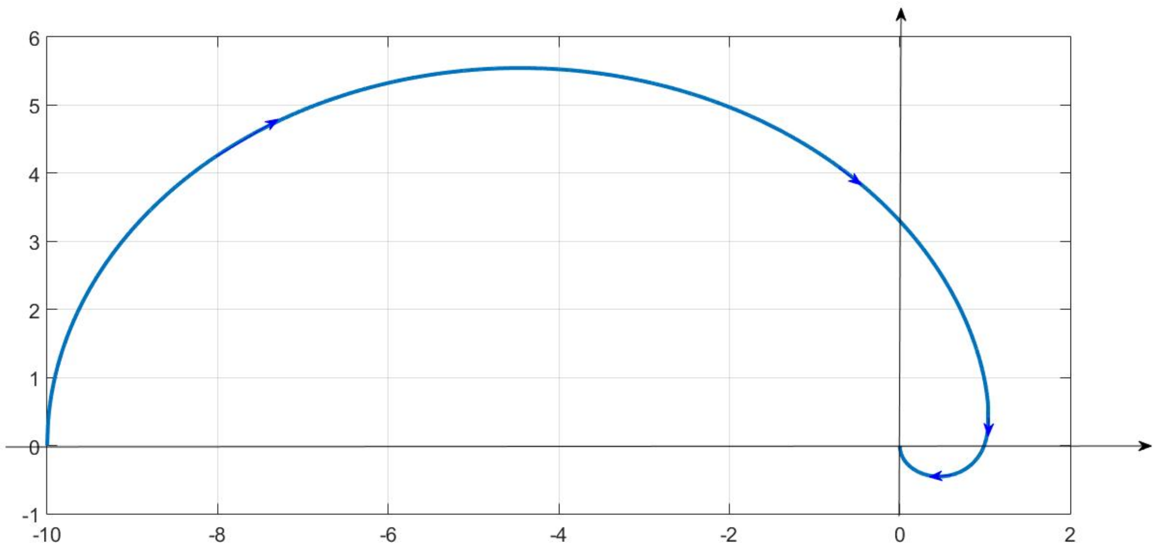
3. Si consideri la seguente funzione di trasferimento:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = 100\frac{(s-10)}{(s+1)(s+100)}$$

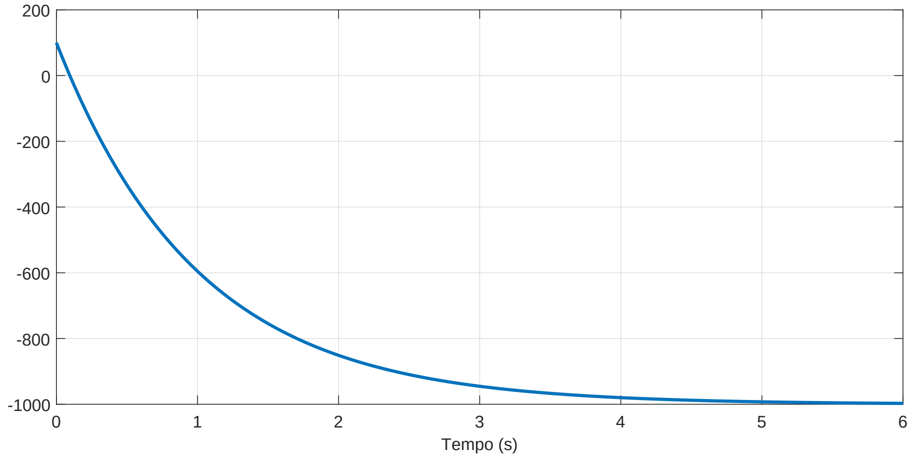
3.1) Tracciare i diagrammi asintotici ed esatti del modulo e della fase della risposta in frequenza associata a $F(s)$.

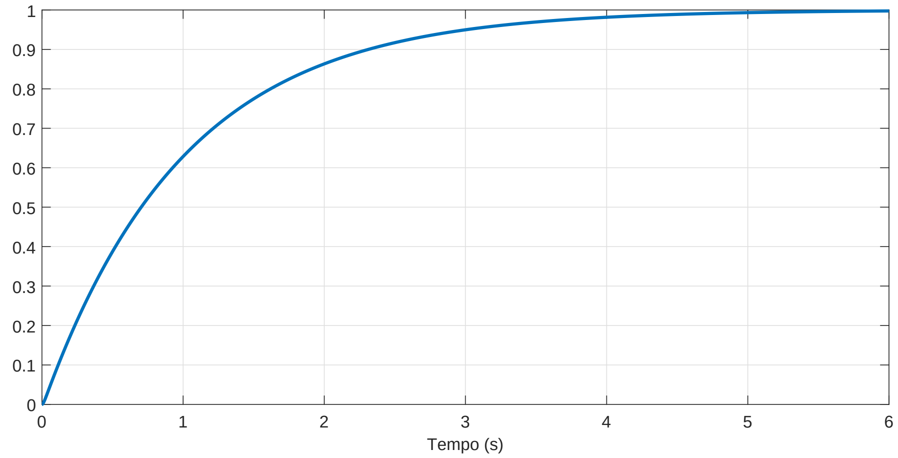


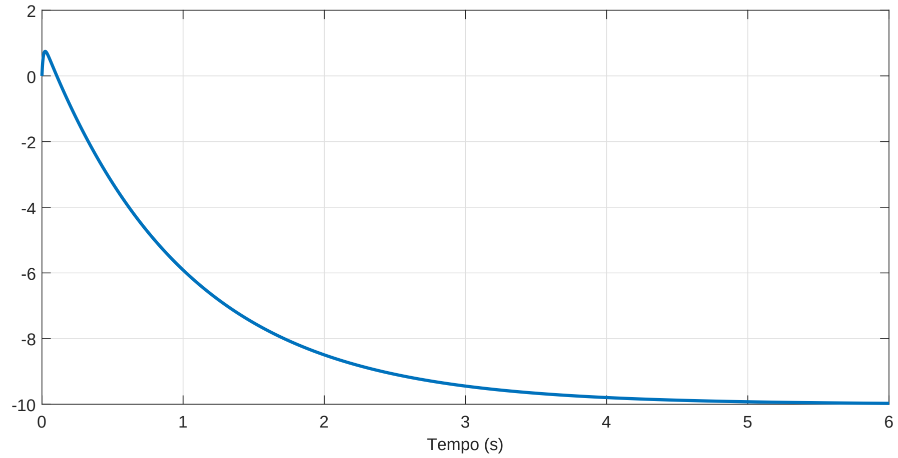
3.2) Disegnare il diagramma polare qualitativo associato a $F(s)$.



3.3) Indicare quale tra le seguenti è la risposta del sistema la cui funzione di trasferimento $F(s)$ è quella assegnata, se $u(t) = sca(t)$. Giustificare la risposta.







$$Y(s) = 100 \cdot \frac{(s-10)}{(s+1)(s+100)} \cdot \frac{1}{s} = 100 \cdot \left(\frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+100)} + \frac{C}{s} \right)$$

$$As(s+100) + B(s+1)s + C(s+1)(s+100) \equiv (s-10)$$

$$As^2 + 100As + Bs^2 + Bs + C(s^2 + 101s + 100) \equiv (s-10)$$

$$As^2 + 100As + Bs^2 + Bs + Cs^2 + 101Cs + 100C \equiv s - 10$$

$$A + B + C = 0$$

$$100A + B + 101C = 1$$

$$100C = -10$$

$$\Rightarrow$$

$$C = -\frac{1}{10}$$

$$A + B = \frac{1}{10}$$

$$100A + B = 1 + \frac{101}{10}$$

$$\Rightarrow$$

$$100A - A = 1 + \frac{101}{10} - \frac{1}{10}$$

$$99A = \frac{10 + 101 - 1}{10}$$

$$A = \frac{1}{9} \; ; \; B = \frac{1}{10} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{90}$$

da cui

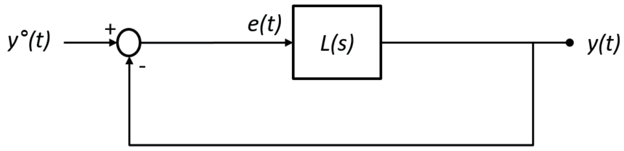
$$y(s) = \frac{100}{9} \cdot \frac{1}{(s+1)} - \frac{100}{90} \cdot \frac{1}{(s+100)} - \frac{100}{10} \cdot \frac{1}{s}$$

e antitrasformando

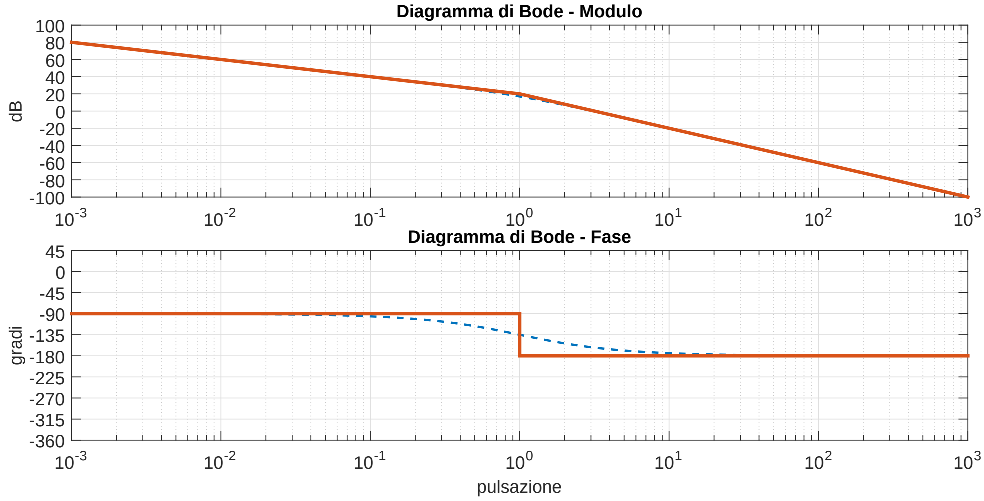
$$y(t) = \frac{100}{9} \cdot e^{-t} - \frac{10}{9} \cdot e^{-t100} - 10$$

La figura giusta è la terza.
A regime l'uscita vale -10.

4. Si consideri il seguente sistema retroazionato,



con il seguente diagramma di Bode della funzione d'anello $L(s)$.



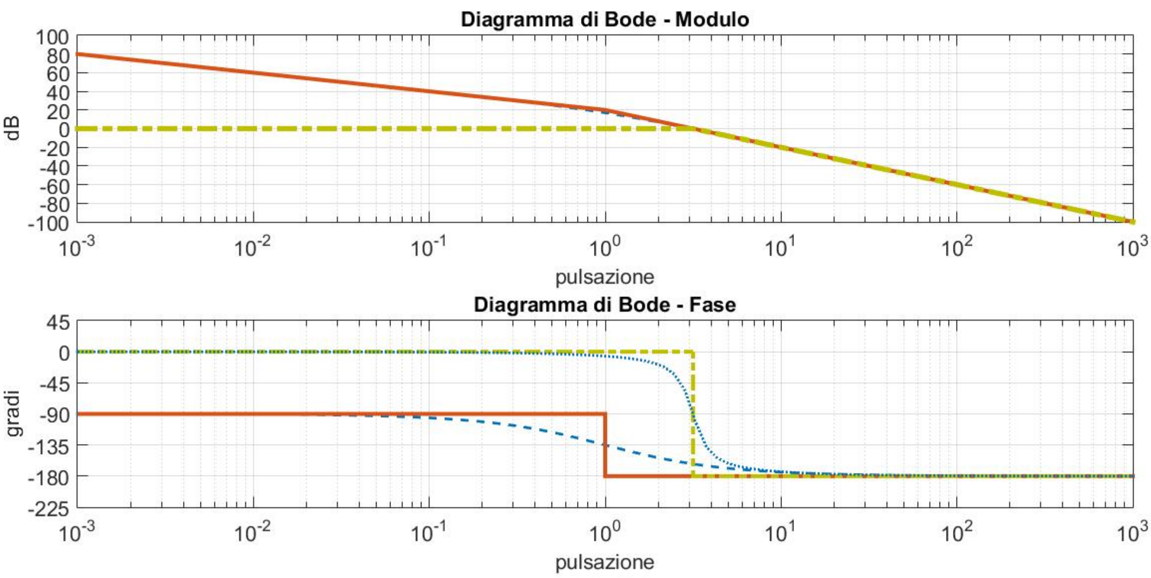
4.1) Valutare dal diagramma di Bode di $L(s)$ se il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Dal diagramma la pulsazione critica è $\omega_c = 3 \ \frac{rad}{s}$.

La fase critica φ_c è pari a $-160°$ circa.

Il margine di fase $\varphi_M = 180° - 160°$ è pari a $20°$ e quindi il sistema è asintoticamente stabile.

4.2) Stimare l'andamento del diagramma di Bode (modulo e fase) della funzione di trasferimento da $y^\circ(t)$ a $y(t)$ a partire dal diagramma di Bode della funzione d'anello assegnata. (Disegnare il diagramma sovrapposto a quello a seguire della funzione d'anello).



4.3) Valutare l'andamento dell'uscita $y(t)$ quando si applica il segnale $y°(t) = sca(t)$: Che valore assume a regime il segnale $y(t)$? In quanto tempo, indicativamente, si raggiunge il valore di regime?

Il margine di fase è relativamente piccolo: i poli che caratterizzano la risposta allo scalino sono complessi e coniugati. Perciò nella risposta ci sono oscillazioni smorzate che si attenuano in un tempo circa pari a: $\frac{5}{\hat{\xi}\hat{\omega}_n} = \frac{5}{0,2 \cdot 3} = 8,3$ sec.

Data la presenza di un integratore nell'anello, il valore assunto dall'uscita a regime è pari a 1.

4.4) Determinare l'espressione analitica a regime dell'uscita $y(t)$ se il segnale in ingresso al sistema $y°(t)$ è pari a $y°(t) = 1 + sin(0.01t) + sin(10t)$.

$$y(t) = 1 + \sin(0{,}01t) + 0{,}1 \sin(10t - \pi)$$

4.5) Quanto sarebbe la pulsazione critica ω_c del sistema se si moltiplicasse per 0.1 la funzione d'anello $L(s)$? Quanto sarebbe il margine di fase del sistema?

Moltiplicare per un fattore 0,1 significa "spostare" verso il basso di una decade il diagramma di Bode del modulo di $L(s)$ di 20 dB.

$\Rightarrow \omega_c = 1 \frac{rad}{s}$ e $\varphi_c = -135°$ $\Rightarrow \varphi_M = 180° - 135° = 45°$

5. Enunciare il criterio di stabilità di Routh-Hurwitz per i sistemi lineari a tempo continuo.